

15. Se dau patru numere naturale. Cunoscând că sumele oricăror trei dintre ele sunt respectiv 300, 500, 600, 607, aflați numerele.

(*prof. Nicolae Ivășchescu, R.M.T. nr. 2/2008*)

16. Fie numerele nenule „a“, „b“, „c“, „d“ astfel încât $a + b = 18$, $b + c = 14$, $c + d = 10$. Calculați suma $5a + 6b + 8c + 7d$.

(*prof. Nicolae Ivășchescu, P. 265, R.M.I. nr. 1/2013*)

17. Arătați că nu există numere naturale de două cifre care să fie egale cu suma cifrelor lor.

(*prof. Nicolae Ivășchescu, P. 602, G.M. nr. 6-7-8/2013*)

METODA REDUCERII LA UNITATE

I. DESCRIEREA METODEI

Într-o problemă care se rezolvă cu metoda reducerii la unitate se dau două mărimi. La prima dintre mărimi se cunosc două valori, la cealaltă numai o valoare, cea de-a doua valoare a ei urmând a fi aflată. Pentru aflarea acesteia se calculează mai întâi „valoarea“ unei unități din prima mărime.

II. PROBLEME REZOLVATE

1. 7 stilouri costă 91 de lei. Aflați câți lei costă 12 stilouri de același fel.

Rezolvare

Pentru a afla prețul unei unități (stilou) efectuăm:

$$91 : 7 = 13 \text{ lei costă un stilou.}$$

Pentru a afla costul a 12 unități (stilouri) efectuăm:

$$13 \text{ lei} \times 12 = 156 \text{ lei.}$$

2. Un tren accelerat parcurge 320 km în 4 ore. Dacă până la destinație mai circulă încă 5 ore cu aceeași viteză, ce distanță a parcurs în total?

Rezolvare

$$4 \text{ ore} \dots\dots\dots 320 \text{ km}$$

$$1 \text{ oră} \dots\dots\dots 320 \text{ km} : 4 \text{ ore} = 80 \text{ km/oră}$$

$$5 \text{ ore} \dots\dots\dots 80 \text{ km/oră} \times 5 \text{ ore} = 400 \text{ km}$$

$$\text{În total a parcurs: } 320 \text{ km} + 400 \text{ km} = 720 \text{ km}$$

3. Pe un CD sunt înregistrate 12 povești, fiecare având aceeași durată. Ascultarea CD-ului durează 4 ore. Cât timp este necesar pentru ascultarea a 4 povești?

Rezolvare

1 oră 60 minute

4 ore 4×60 minute = 240 minute

12 povești..... 240 minute

1 poveste..... $240 \text{ minute} : 12 = 20$ minute

4 povești..... 4×20 minute = 80 minute

Timpul necesar pentru ascultarea a 4 povești este de 80 de minute.

4. 96 de tablouri au fost expuse pe 3 dintre cele 5 etaje ale unui muzeu. Știind că pe fiecare etaj se expune același număr de tablouri, aflați câte tablouri mai pot fi expuse.

Rezolvare

3 etaje 96 tablouri

1 etaj..... $96 \text{ tablouri} : 3 = 32$ tablouri

2 etaje 2×32 tablouri = 64 tablouri

Mai pot fi expuse 64 de tablouri.

III. PROBLEME PROPUSE

1. Raluca citește în fiecare zi același număr de pagini. Știind că în 5 zile a citit 125 de pagini, să se afle în câte zile o să citească 450 de pagini.

2. O croitoreasă confecționează din 60 m de material 30 de cămăși de aceeași mărime. Câți metri de material sunt necesari pentru confecționarea a 45 de cămăși de același fel?

3. Din 2 kg de făină mama face 4 cozonaci. Din câte kilograme de făină va face mama 10 cozonaci?

4. Un autoturism consumă 2 l de benzină pe o distanță de 25 km. Câți litri de benzină va consuma pentru a parcurge 400 km, dacă va merge cu aceeași viteză?

5. Un pachet de 100 de coli de scris are grosimea de 10 mm. Care este numărul colilor conținute într-un pachet de 7 cm grosime?

6. Un ghem de sfoară cântărește 475 g. Care este lungimea firului ce formează ghemul, dacă 10 m de sfoară cântăresc 25 g?

7. Un fermier folosește 600 kg de îngrășăminte la hectar. Ce cantitate de îngrășăminte utilizează pentru întreaga suprafață care este de 135 000 m²?

8. Pentru a cumpăra 40 de scaune, o grădiniță a dat 8 600 de lei. Cât trebuie să plătească o altă grădiniță care cumpără 56 de scaune de același fel?

9. Pe o distanță de 324 m s-au instalat 54 de conducte de apă. Câte conducte de același fel sunt necesare pentru o distanță de 816 m?

10. 17 saci cu cartofi cântăresc 289 kg. Câți saci de același fel cântăresc împreună 884 kg?

11. Elevii unei școli pleacă într-o excursie cu 3 autocare care au același număr de locuri. În primele două autocare au fost repartizați 90 de elevi. Câți elevi pleacă în excursie?

12. Zece stâlpi de curent electric sunt legați cu 180 m de cablu. Câți metri de cablu leagă 20 de astfel de stâlpi?

(prof. înv. primar Marian Ciuperceanu)

13. În timp ce Mircea mănâncă 2 piersici, Ovidiu mănâncă 3 și Diana 5. Câte piersici revin fiecăruia dacă împreună au 60 de piersici?

(prof. Ioan Săcăleanu, Hirău)

METODA MERSULUI INVERS

I. DESCRIEREA METODEI

Problemele care se rezolvă prin această metodă cer aflarea unui număr (sau a unei mărimi) asupra căruia (căreia) se efectuează succesiv anumite operații obținându-se un rezultat cunoscut.

Soluția problemei se obține efectuând în ordine inversă (de la sfârșit către început) operații după următoarea regulă:

- a)** dacă ultima operație din enunț a fost o împărțire cu un anumit număr, în rezolvare prima operație va fi o înmulțire cu acel număr;
 - b)** dacă ultima operație din enunț a fost o înmulțire cu un număr dat, în rezolvare prima operație va fi o împărțire la acel număr;
 - c)** dacă ultima operație din enunț a fost o adunare cu un anumit număr, atunci în rezolvare prima operație va fi o scădere cu scăzătorul acel număr;
 - d)** dacă ultima operație din enunț a fost o scădere cu scăzătorul un anumit număr, atunci prima operație din rezolvarea problemei va fi o adunare cu acel scăzător.
- Această regulă se aplică pentru fiecare operație ce apare în enunțul problemei.

II. PROBLEME REZOLVATE

1. Am ales un număr, l-am înmulțit cu 4, la produsul obținut am adunat 24, suma obținută s-a împărțit exact la 8, iar din cât am scăzut 67 obținând 9. Ce număr am ales?

Rezolvare

Care este ultima operație făcută? Din enunț aflăm: „Din cât am scăzut 67 obținând 9“. Deci numărul din care scădem 67 și obținem 9 este $9 + 67 = 76$.

Reformulând problema dată obținem:

„Am ales un număr, l-am înmulțit cu 4, la produsul obținut am adunat 24, suma obținută s-a împărțit exact la 8, obținându-se 76. Ce număr am ales?“

Care este ultima operație făcută? O operație de împărțire. Ce număr împărțit la 8 dă 76? Acesta este $76 \times 8 = 608$.

Problema se transformă astfel:

„Am ales un număr, l-am înmulțit cu 4, la produsul obținut am adunat 24, rezultând 608. Ce număr am ales?“

Ultima operație făcută este o adunare. Ce număr adunat cu 24 dă 608? Acesta este $608 - 24 = 584$.

Problema devine:

„Am ales un număr, l-am înmulțit cu 4 obținând 584.“

Deci, numărul căutat este $584 : 4 = 146$.

Observație

Problema se poate rezolva și cu ajutorul ecuațiilor. Notăm cu „x“ numărul căutat. Ecuația corespunzătoare problemei este:

$$(4x + 24) : 8 - 67 = 9.$$

Rezolvând această ecuație se obține $x = 146$.

2. La plecarea dintr-o stație, jumătate din locurile unui autobuz sunt ocupate de călători. La prima stație coboară 10 persoane, iar la a doua stație urcă 25 de persoane, acum în autobuz fiind 39 de călători. Câte locuri pentru călători are autobuzul?

Rezolvare

Câte persoane erau în autobuz înainte de a doua stație?

$$39 - 25 = 14$$

Câte persoane erau în autobuz înainte de prima stație?

$$14 + 10 = 24$$

Câte locuri pentru călători are autobuzul?

$$2 \times 24 = 48$$

3. Dacă triplăm un număr mărit cu 3 și micșorăm cu 3 rezultatul obținut, rezultatul este 33. Aflați numărul.

(prof. Ion Pătrașcu)

Rezolvare

Ultima operație din enunț a fost o scădere având pe 3 ca scăzător. Adunăm la 33 numărul 3 și obținem 36. Acest rezultat se obține în urma triplării numărului mărit cu 3, deci $36 : 3 = 12$ reprezintă numărul mărit cu 3. Efectuând $12 - 3$ găsim că numărul cerut este 9.

4. Un număr natural adunat cu jumătatea sa, cu sfertul său și cu optimea sa dă 30. Aflați numărul.

(prof. Nicolae Ivășchescu, P. 451, G.M. nr. 3/2012)

Rezolvare



O pătrime are $\frac{2}{8}$ (două optimi); o jumătate are două sferturi, deci are $\frac{4}{8}$ (patru optimi); un întreg are 2 jumătăți, adică are $\frac{8}{8}$ (opt optimi).

Suma are $8 + 4 + 2 + 1 = 15$ optimi.

15 optimi = 30, o optime = 2, deci numărul este 16.

5. Aflați un număr natural de două cifre, știind că dacă numărul este micșorat cu cifra zecilor, iar rezultatul obținut este mărit de un număr de ori egal cu cifra unităților, se obține un număr cu două cifre egale cu cifra unităților numărului dat.

(prof. Ion Pătrașcu)

Rezolvare

Numărul micșorat cu cifra zecilor este 11. Într-adevăr, dacă „a” este cifra zecilor numărului căutat, atunci $\overline{aa} : a = 11$. Notând numărul căutat \overline{ab} avem că $\overline{ab} - a = 11$. De aici obținem că $\overline{ab} = 11 + a$. Deoarece „a” este cifră nenulă, rezultă că $11 + a$ poate fi cel mult 20.

Dacă $11 + a = 20$ rezultă $a = 9$ și nu este posibilă egalitatea $\overline{ab} = 20$. Dacă $11 + a$ nu este 20, atunci înseamnă că $a = 1$ și prin urmare $b = 2$. Numărul căutat este 12.

6. Aflați „x” din egalitatea:

$$2\ 010 - \{2\ 009 - [2\ 009 - 2 \times (2\ 008 + 2\ 009 : x) + 2\ 009]\} = 1.$$

(prof. Nicolae Ivășchescu, S:P10.115, G.M. nr. 6/2010)

Metoda I (Metoda mersului invers)

Ținând cont de proprietățile operațiilor avem:

$$\begin{aligned} \{ \dots \} &= 2\ 010 - 1 \Rightarrow \{ \dots \} = 2\ 009 \Rightarrow 2\ 009 - [\dots] = 2\ 009 \Rightarrow [\dots] = 2\ 009 - \\ &- 2\ 009 \Rightarrow [\dots] = 0 \Rightarrow 2\ 009 - 2 \times (2\ 008 + 2\ 009 : x) + 2\ 009 = 0 \Rightarrow 2 \times 2\ 009 = \\ &= 2 \times (2\ 008 + 2\ 009 : x) \mid : 2 \Rightarrow 2\ 009 = 2\ 008 + 2\ 009 : x \Rightarrow 2\ 009 - 2\ 008 = 2\ 009 : x \Rightarrow \\ &\Rightarrow 1 = 2\ 009 : x \Rightarrow x = 2\ 009. \end{aligned}$$

Metoda II (algebric)

Obținem:

$2\ 010 - [2\ 009 - (2\ 009 - 2 \times 2\ 008 - 2 \times 2\ 009 : x + 2\ 009)] = 1 \Rightarrow 2\ 010 - (2\ 009 - 2\ 009 + 2 \times 2\ 008 + 2 \times 2\ 009 : x - 2\ 009) = 1$. (Am ținut cont de faptul că pentru a scădea o diferență neefectuată scădem descăzutul și adunăm scăzătorul.)

În continuare avem $2\ 010 - 2 \times 2\ 008 - 2 \times 2\ 009 : x + 2\ 009 = 1 \Rightarrow 4\ 019 - 2 \times 2\ 008 - 2 \times 2\ 009 : x = 1 \Rightarrow 4\ 019 - 4\ 016 - 1 = 2 \times 2\ 009 : x \Rightarrow 2 = 2 \times 2\ 009 : x \mid : 2 \Rightarrow 1 = 2\ 009 : x \Rightarrow x = 2\ 009$.

III. PROBLEME PROPUSE

1. Un număr natural se împarte exact la 9. Adunând acest număr cu câtul împărțirii lui cu 9 și scăzând din rezultat numărul 17, se obține 33. Aflați numărul.

2. Dacă unui număr natural i se scrie la dreapta cifra 0 și numărul obținut se adună cu numărul inițial, se obține numărul 1 111. Aflați numărul inițial.

3. Aflați numerele naturale „x“, „y“, „z“, „t“ știind că sunt îndeplinite următoarele condiții:

- a) x este de 4 ori mai mic decât y ; c) z este de 3 ori mai mare decât t ;
b) y este cu 191 mai mic decât z ; d) t este cu 114 mai mare decât 103.

4. Bill s-a gândit la un număr natural. Nick l-a înmulțit cu 5 sau 6. John a adăugat la rezultatul lui Nick 5 sau 6. Andrew a scăzut din rezultatul lui John 5 sau 6. Rezultatul obținut este 73. La ce număr s-a gândit Bill?

- a) 14 b) 12 c) 22 d) 30 e) 555

(Concursul „Cangurul“ clasele III-IV)

5. Un elev a citit o carte în trei zile. În prima zi a citit o treime din numărul de pagini. A doua zi a citit cu 30 de pagini mai puțin decât în prima zi, iar în a treia zi a citit 68 de pagini. Câte pagini are cartea?

6. Un număr este înmulțit cu 12. La rezultat adunăm 51. Din noul rezultat scădem 62 și obținem 361. Să se afle numărul.

7. Am ales un număr. L-am mărit cu 2, am dublat rezultatul obținut, am scăzut 2 și noul rezultat l-am împărțit la 2, obținând 91. Aflați numărul.

8. Vulpea trăiește cu 5 ani mai mult decât iepurele și de trei ori mai puțin decât ursul. Știind că ursul trăiește 45 de ani, aflați câți ani trăiește iepurele.

9. Pentru a desena o planșă, un elev are nevoie de 45 de minute, pentru tema la citire cu 15 minute mai mult, iar pentru tema la matematică de 2 ori mai mult decât la citire. În cât timp își face temele elevul?

CAPITOLUL II

PROBLEME DATE LA CONCURSURILE DE MATEMATICĂ

CLASA a III-a

Concursul interjudețean de matematică „Elena Bădilă” Ediția a III-a, Giurgiu 8-9 aprilie 2006, clasa a III-a

1. Aflați numărul \overline{abc} , unde „b” este dublul lui „a”, „a” este dublul lui „c” și suma cifrelor este 14.
2. Calculați valoarea lui „m” pentru fiecare din situațiile de mai jos:
a) $50 - m - 14 = 3$; b) $m - 50 + 3 = 14$; c) $50 - 3m = 14$.
3. Succesorul unui număr „a” se mărește de 7 ori și se obține cel mai mare număr impar de două cifre care are cifra zecilor 4. Care este numărul „a”?

Concursul revistei „Arhimede” Ediția a III-a, etapa a II-a zonală, 25 februarie 2006, clasa a III-a

1. a) Aflați numerele „x”, „y”, „z”, știind că $x + y = 142$, $y + z = 90$, $x + z = 156$.
b) Într-o clasă sunt 25 de copii. Arătați că cel puțin trei au ziua de naștere în aceeași lună.
2. a) Calculați valoarea lui „x” din relația $(47 + 7) : x = 28 : 4 + 42 : 6 - 35 : 7$.
b) Calculați suma numerelor de forma \overline{ab} , „a” mai mic decât „b”, știind că $\overline{ab} + \overline{ba} = 154$.
3. Observați aranjarea:

8	11	14	17	20	...	98	101
103	100	97	94	91	...	13	10

 - a) Cărui număr din primul rând îi corespunde numărul 55 din al doilea rând?
 - b) Verificați dacă numărul 55 se află în al doilea rând.
4. Un șir de furnici, lung de 20 m, trece pe un pod lung de 60 m cu viteza de 10 m pe minut. Cât timp durează până coloana parcurge podul?

CUPRINS

<i>Cuvânt-înainte</i>	3
CAPITOLUL I. Tipuri de probleme pentru cercuri și concursuri	5
Egalități	5
Metoda reducerii la unitate	10
Metoda mersului invers	12
Metoda figurativă (Metoda grafică)	17
Metoda comparației	24
Metoda ipotezelor (Metoda presupunerii)	28
Câteva reguli de calcul rapid (mental)	32
Alte reguli	33
Principiul cutiei	35
Probleme de mișcare	38
Sistemul de numerație zecimal	42
Probleme de numărare	46
Teorema împărțirii cu rest	50
Calculul unor sume de numere naturale	54
Probleme de matematică distractivă	60
Perimetre	66
Arii	71
Jocuri	78
CAPITOLUL II. Probleme date la concursurile de matematică	81
Clasa a III-a	81
Clasa a IV-a	118
Indicații – Soluții – Răspunsuri	193
Bibliografie	294
Colaboratori	295