Ion Bucur Popescu

MATEMATICĂ

M1 Subiecte rezolvate BAC 2022

- Filiera teoretică: profilul real, specializarea • matematică-informatică
- Filiera vocațională: profilul militar, specializarea • matematică-informatică

EDITURA CARMINIS
educațional

Ion Bucur Popescu

MATEMATICĂ
M1

Subiecte rezolvate
BAC

- **Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică**
- **Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică**

EDITURA CARMINIS
educațional

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
POPESCU, ION BUCUR
Matematică M1 : subiecte rezolvate - Bacalaureat / Ion Bucur Popescu – Piteşti: Carminis Educaţional
480 p. : 24 cm

ISBN 978-973-123-116-7

51(075.35)(076)

Tehnoredactare computerizată: **Editura CARMINIS**

Tiparul executat la **S.C. EURO PONTIC SERV S.R.L. Cluj-Napoca**

Comenzile se primesc la
tel./fax: 0248253022, 0248252467
sau pe adresa: Editura CARMINIS
str. Exerciţiu, bl. D 22, sc. B, ap. 1
cod 110242, Piteşti, jud. Argeş, România
www.carminis.ro
e-mail: editura_carminis@yahoo.com

ISBN 978-973-123-116-7

SUBIECTUL I

Varianta 1

1. Să se determine numărul natural x din egalitatea $1+5+9+\cdots+x=231$.

2. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale inecuaţia $2x^2-5x+3\le 0$.

3. Să se determine inversa funcţiei bijective $f:(0,\infty)\to(1,\infty)$, $f(x)=x^2+1$.

4. Se consideră mulţimea $A=\{1,2,3,\cdots 10\}$. Să se determine numărul submulţimilor cu trei elemente ale mulţimii A, care conţin elementul 1.

5. Să se determine $m\in\mathbb{R}$, astfel încât distanţa dintre punctele $A(2,m)$ şi $B(m,-2)$ să fie 4.

6. Să se calculeze $\cos\frac{23}{12}\cdot\sin\frac{}{12}$.

Rezolvări

1. Termenii sumei aparţin unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, cu primul termen $a_1=1$ şi raţia $r=a_2-a_1=5-1=4$. Avem $a_n=a_1+(n-1)\cdot r=1+(n-1)\cdot 4=4n-3$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, de unde deducem că $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}=\frac{(1+4n-3)\cdot n}{2}=(2n-1)\cdot n=2n^2-n$, pentru $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Pentru $S_n=2n^2-n=231$, obţinem ecuaţia de gradul al II-lea $2n^2-n-231=0$, cu $a=2$, $b=-1$, $c=-231$, $\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\cdot 2\cdot(-231)=1849=43^2$, deci $n_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1\pm 43}{4}$, $n_1=\frac{1-43}{4}=-\frac{21}{2}\notin\mathbb{N}$, $n_2=\frac{1+43}{4}=11\in\mathbb{N}$, deci $n=11\Rightarrow$ $\Rightarrow x=a_n=a_{11}=4\cdot 11-3=41$, adică $x=41$.

2. Avem o inecuaţie de gradul al II-lea cu $a=2$, $b=-5$, $c=3$, $\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\cdot 2\cdot 3=1$, $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{5\pm 1}{4}$, $x_1=\frac{5-1}{4}=1$, $x_2=\frac{5+1}{4}=\frac{3}{2}$.

Din relaţiile $a=2>0$, $x_1=1$ şi $x_2=\frac{3}{2}$, deducem că $2x^2-5x+3\le 0\Leftrightarrow x\in\left[1,\frac{3}{2}\right]$.

3. Pentru $x\in(0,\infty)$ şi $y\in(1,\infty)$, avem $x^2+1=y\Leftrightarrow x^2=y-1\Leftrightarrow x=\sqrt{y-1}$, deci $f^{-1}(y)=x=\sqrt{y-1}$ sau, notând variabila tot cu x, avem $f^{-1}(x)=\sqrt{x-1}$, $f^{-1}:(1,\infty)\to(0,\infty)$.

4. Fie $A'=A-\{1\}$ submulţimea elementelor diferite de elementul 1. Evident $|A|=10$ şi $|A'|=9$. Mulţimea A admite C_{10}^3 submulţimi de trei elemente, dintre care C_9^3 sunt şi submulţimile lui $A'\subset A$, submulţimi care nu conţin elementul 1, deci rămân $C_{10}^3-C_9^3=C_9^2=\frac{8\cdot 9}{2}=36$ de submulţimi cu trei elemente care conţin elementul 1.

5. Avem $AB=\sqrt{(2-m)^2+[m-(-2)]^2}=\sqrt{(2-m)^2+(m+2)^2}=\sqrt{2m^2+8}$, deci $AB=4\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sqrt{2m^2+8}=4\Leftrightarrow 2m^2+8=4^2=16\Leftrightarrow 2m^2=16-8=8\Leftrightarrow m^2=\frac{8}{2}=4\Leftrightarrow m_{1,2}=\pm2$, deci $m\in\{-2,2\}\subset\mathbb{R}$.

6. $\cos\frac{23}{12}=\cos\frac{(24-1)}{12}=\cos\left(\frac{24}{12}-\frac{}{12}\right)=\cos\left(2\ \ -\frac{}{12}\right)=\cos\left(-\frac{}{12}\right)=\cos\left(\frac{}{12}\right)$, unde am folosit periodicitatea şi paritatea funcţiei cosinus.

Atunci $\cos\frac{23}{12}\cdot\sin\frac{}{12}=\cos\frac{}{12}\cdot\sin\frac{}{12}=\frac{1}{2}\sin\frac{}{6}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

Varianta 2

1. Să se arate că numărul $(1-i)^{24}$ este real.

2. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\frac{3x-1}{x+1}+\frac{x+1}{2x-1}=3$.

3. Să se determine inversa funcţiei bijective $f:\mathbb{R}\to(1,\infty)$, $f(x)=e^x+1$.

4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr $\overline{ab}$ din mulţimea numerelor naturale de două cifre, să avem $a\neq b$.

5. Să se calculeze lungimea medianei din A a triunghiului ABC, unde $A(-2,-1)$, $B(2,0)$, $C(0,6)$.

6. Fie vectorii $\vec{u}=m\vec{i}+3\vec{j}$ şi $\vec{v}=(m-2)\vec{i}-\vec{j}$. Să se determine $m>0$ astfel încât vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ să fie perpendiculari.

Rezolvări

1. Avem $(1-i)^2=1-2i+i^2=-2i\Rightarrow(1-i)^{24}=\left[(1-i)^2\right]^{12}=(-2i)^{12}=2^{12}\cdot\left(i^4\right)^3=2^{12}\in\mathbb{R}$.

2. Se impun condiţiile $x+1\neq0\Leftrightarrow x\neq-1$ şi $2x-1\neq0\Leftrightarrow x\neq\frac{1}{2}$, deci $x\in\mathbb{R}-\left\{-1,\ \frac{1}{2}\right\}$.

$\frac{3x-1}{x+1}+\frac{x+1}{2x-1}=3\ \Big|\ \cdot(x+1)(2x-1)\Rightarrow(3x-1)(2x-1)+(x+1)^2=3(x+1)(2x-1)\Rightarrow$

$\Rightarrow6x^2-5x+1+x^2+2x+1=3\left(2x^2+x-1\right)\Rightarrow7x^2-3x+2=6x^2+3x-3\Rightarrow x^2-6x+5=0$.

Am obţinut astfel o ecuaţie de gradul al II-lea cu $a=1$, $b=-6$, $c=5$, $\Delta=b^2-4ac=$

$=(-6)^2-4\cdot1\cdot5=16>0$, deci ecuaţia admite rădăcinile reale distincte $x_{1,\,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=$

$=\frac{-(-6)\pm\sqrt{16}}{2\cdot1}=\frac{6\pm4}{2}=\frac{2(3\pm2)}{2}=3\pm2$, deci $x_1=3-2=1$ şi $x_2=3+2=5$.

În plus, observăm că $S=\{1,5\}\subset\mathbb{R}-\left\{-1,\frac{1}{2}\right\}$.

3. Avem $e^x+1=y \Leftrightarrow e^x=y-1 \Leftrightarrow x=\ln(y-1)$, deci $f^{-1}(y)=x=\ln(y-1)$ sau, folosind tot variabila x, avem $f^{-1}(x)=\ln(x-1)$, unde $f^{-1}:(1,\infty)\to\mathbb{R}$.

4. Fie $A=\{10,11,12,\cdots,99\}$ mulţimea numerelor de două cifre. Observăm că $|A|=99-9=90$. Fie $A'=\{11,22,\cdots,99\}$ mulţimea numerelor formate din două cifre egale. Observăm că $|A'|=9$ şi că $A'\subset A$, ceea ce ne permite să scriem că $|A-A'|=|A|-|A'|=90-9=81$. În final, observăm că $B=\left\{\overline{ab}\,\middle|\,\overline{ab}\in A, a\neq b\right\}=A-A'$, deci $|B|=|A-A'|=81$, de unde deducem că probabilitatea căutată este $p=\frac{|B|}{|A|}=\frac{81}{90}=\frac{9}{10}=0,9$.

5. Fie M mijlocul segmentului BC. Avem $x_M=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{2+0}{2}=1$ şi $y_M=\frac{y_B+y_C}{2}=$ $=\frac{0+6}{2}=3$, deci M are coordonatele $(x_M,y_M)=(1,3)$. Lungimea medianei din A a triunghiului ABC este lungimea segmentului determinat de punctele $A(-2,-1)$ şi $M(1,3)$, deci $AM=\sqrt{(-2-1)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=\sqrt{25}=5$.

6. Avem $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Leftrightarrow\left(m\vec{i}+3\vec{j}\right)\cdot\left[(m-2)\vec{i}-\vec{j}\right]=0\Leftrightarrow m(m-2)+3\cdot(-1)=0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow m^2-3m-2=0$. Am obţinut astfel o ecuaţie de gradul al II-lea în necunoscuta m, cu $a=1$, $b=-2$, $c=-3$, deci $\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\cdot1\cdot(-3)=16>0$, adică ecuaţia admite rădăcinile reale distincte $m_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{16}}{2\cdot1}=\frac{2\pm4}{2}=\frac{2(1\pm2)}{2}=1\pm2$, de unde $m_1=1-2=-1\notin(0,\infty)$ şi $m_2=1+2=3>0$. În concluzie, $m=3$ este valoarea căutată.

Varianta 3

1. Să se ordoneze crescător numerele $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{5}$.

2. Să se determine valoarea minimă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^2-8x+1$.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\lg(x-1)+\lg(6x-5)=2$.

4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie pătrat perfect.

5. Să se determine ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(6,4)$ şi este perpendiculară pe dreapta $d: 2x-3y+1=0$.

6. Ştiind că $\sin\quad=\frac{1}{3}$, să se calculeze $\cos 2\quad$.

Rezolvări

1. Avem $\sqrt{2}=\sqrt[12]{2^6}=\sqrt[12]{64}$, $\sqrt[3]{4}=\sqrt[12]{4^2}=\sqrt[12]{256}$, $\sqrt[4]{5}=\sqrt[12]{5^3}=\sqrt[12]{125}$.
Din $64<125<256 \Rightarrow \sqrt[12]{64}<\sqrt[12]{125}<\sqrt[12]{256}$, adică $\sqrt{2}<\sqrt[4]{5}<\sqrt[3]{4}$.

2. Avem o funcţie de gradul al II-lea cu $a=4$, $b=-8$, $c=1$, deci $\Delta=b^2-4ac=$ $=(-8)^2-4\cdot4\cdot1=48$. Deoarece $a=4>0 \Rightarrow$ funcţia f admite valoare minimă, respectiv

$$\min_{x\in\mathbb{R}} f(x)=y_V=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{48}{4\cdot4}=-3.$$

3. Se impun condiţiile $x-1>0 \Leftrightarrow x>1 \Leftrightarrow x\in(1,\infty)$ şi $6x-5>0 \Leftrightarrow x>\frac{5}{6} \Leftrightarrow x\in\left(\frac{5}{6},\infty\right)$, deci $x\in(1,\infty)\cap\left(\frac{5}{6},\infty\right)=(1,\infty)$. Avem $\lg(x-1)+\lg(6x-5)=2 \Rightarrow \lg(x-1)(6x-5)=\lg100 \Rightarrow$ $\Rightarrow (x-1)(6x-5)=100 \Rightarrow 6x^2-11x-95=0$. Am obţinut astfel o ecuaţie de gradul al II-lea cu $a=6$, $b=-11$ şi $c=-95$, de unde rezultă că $\Delta=b^2-4ac=(-11)^2-4\cdot6\cdot(-95)=2401=$ $=49^2>0$, deci ecuaţia admite rădăcinile reale distincte $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{11\pm49}{12}$, deci $x_1=\frac{11-49}{12}=-\frac{19}{6}\notin(1,\infty)$, respectiv $x_2=\frac{11+49}{12}=5\in(1,\infty)$. În concluzie, ecuaţia admite soluţia $x=5$.

4. Fie $A=\{10,11,\cdots,99\}$ mulţimea numerelor naturale de două cifre. Observăm că $|A|=99-9=90$. Fie $B=\left\{n\in A \mid \exists k\in\mathbb{N},\, n=k^2\right\}$. Observăm că $B=\left\{4^2,5^2,\cdots,9^2\right\}$ şi $|B|=9-3=6$, deci probabilitatea cerută este $p=\frac{|B|}{|A|}=\frac{6}{90}=\frac{1}{15}$.

5. Observăm că $2x-3y+1=0 \Leftrightarrow y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$, deci $m=\frac{2}{3}$, unde $m=\text{panta}(d)$. Fie dreapta d' care îndeplineşte condiţiile $d'\perp d$ şi $A(6,4)\in d'$. Avem $d'\perp d \Leftrightarrow m'=-\frac{1}{m}=-\frac{3}{2}$, unde $m'=\text{panta}(d')$. Din $A(6,4)\in d' \Rightarrow d': y-y_A=m'(x-x_A) \Leftrightarrow y-4=-\frac{3}{2}(x-6) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2(y-4)+3(x-6)=0 \Leftrightarrow 3x+2y-26=0$, deci ecuaţia dreptei căutate este $d':\ 3x+2y-26=0$.

6. Avem $\cos 2\ \ =1-2\sin^2\ \ = 1-2\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$.

Varianta 4

1. Să se arate că numărul $\left(\frac{1}{1-i}-\frac{1}{1+i}\right)^2$ este real.

2. Să se arate că vârful parabolei $y=x^2+5x+1$ este situat în cadranul III.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $9^x-10\cdot 3^{x-1}+1=0$.

4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă exact două cifre egale.

5. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care vectorii $\vec{u}=a\vec{i}+(a+1)\vec{j}$ şi $\vec{v}=-(5a-1)\vec{i}+2\vec{j}$ sunt perpendiculari.

6. Să se calculeze lungimea laturii BC a triunghiului ascuţitunghic ABC, ştiind că $AB=6$, $AC=10$ şi că aria triunghiului ABC este egală cu $15\sqrt{3}$.

Rezolvări

1. Avem $\frac{1}{1-i}-\frac{1}{1+i}=\frac{(1+i)-(1-i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{1-i^2}=\frac{2i}{2}=i$, deci $\left(\frac{1}{1-i}-\frac{1}{1+i}\right)^2=i^2=-1\in\mathbb{R}$.

2. Avem $a=1$, $b=5$, $c=1$, $\Delta=b^2-4ac=5^2-4\cdot1\cdot1=21$. Coordonatele vârfului V sunt $x_V=-\frac{b}{2a}=-\frac{5}{2}$ şi $y_V=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{21}{4}$. Evident $x_V<0$ şi $y_V<0$, deci vârful V este situat în cadranul al III-lea.

3. Folosind notaţia $3^{x-1}=y$, $y>0$, ecuaţia devine $9y^2-10y+1=0$, cu soluţiile $y_1=\frac{1}{9}$ şi $y_2=1$. Revenind la notaţia $3^{x-1}=y$, obţinem $3^{x-1}=\frac{1}{9}=3^{-2}\Rightarrow x_1=-1$, respectiv $3^{x-1}=1\Rightarrow$ $\Rightarrow x_2=1$. Deci $x\in\{-1,1\}$.

4. Fie $A=\{100,101,\cdots,999\}$ mulţimea numerelor naturale de trei cifre. Observăm că $|A|=999-99=900$. Numele de trei cifre dintre care exact două cifre sunt egale sunt în una şi numai una dintre formele posibile $\overline{aab}$, $\overline{aba}$ sau $\overline{baa}$. Numerele de forma $\overline{aab}$ sunt în $9\cdot9=81$ variante posibile, deoarece $a\in\{1,2,\cdots,9\}$ poate fi ales în 9 moduri posibile, iar $b\in\{0,1,\cdots,9\}-\{a\}$ poate fi ales şi el în 9 moduri posibile. În mod similar, numerele de forma $\overline{aba}$ sau $\overline{baa}$ sunt fiecare în 81 de variante posibile, deci avem în total $3\cdot81=243$ numere de trei cifre având exact două cifre egale. Probabilitatea căutată este $p=\frac{243}{900}=\frac{27}{100}=0,27$.

5. Avem $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Leftrightarrow\left[a\vec{i}+(a+1)\vec{j}\right]\cdot\left[-(5a-1)\vec{i}+2\vec{j}\right]=0\Leftrightarrow -a(5a-1)+(a+1)\cdot2=0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -5a^2+3a+2=0$, cu soluţiile $a_1=-\frac{2}{5}$ şi $a_2=1$, deci $a\in\left\{-\frac{2}{5},1\right\}$.

6. Avem $S[ABC]=\dfrac{AB\cdot AC\cdot \sin A}{2} \Rightarrow\ 15\sqrt{3}=\dfrac{6\cdot 10\cdot \sin A}{2} \Rightarrow\ \sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow\ m\left(\hat{A}\right)=60^{\circ}$, deoarece, prin ipoteză, triunghiul ABC este ascuţitunghic. Conform Teoremei lui Pitagora generalizată, avem $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot \cos A=\ 6^2+10^2-2\cdot 6\cdot 10\cdot \cos 60^{\circ} \Rightarrow$ $\Rightarrow BC^2=76 \Rightarrow\ BC=\sqrt{76}=2\sqrt{19}$.

Varianta 5

1. Să se calculeze $\dfrac{1}{1+2i}+\dfrac{1}{1-2i}$.

2. Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ inecuaţia $x^2-10x+12\le 0$.

3. Să se determine inversa funcţiei bijective $f:(1,\infty)\to(0,\infty)$, $f(x)=3\log_2 x$.

4. Să se determine numărul funcţiilor $f:\{1,2,3,4\}\to\{1,2,3,4\}$ cu proprietatea că $f(1)=f(4)$.

5. Să se determine coordonatele vârfului D al paralelogramului ABCD, dacă $A(-2,9)$, $B(7,-4)$, $C(8,-3)$.

6. Triunghiul ABC are $B=\dfrac{\ }{3}$ şi lungimea razei cercului circumscris egală cu 1. Să se calculeze lungimea laturii AC.

Rezolvări

1. Avem $\dfrac{1}{1+2i}+\dfrac{1}{1-2i}=\dfrac{1-2i+1+2i}{(1+2i)(1-2i)}=\dfrac{2}{1-4i^2}=\dfrac{2}{5}$.

2. Avem $a=1$, $b=-10$, $c=12$, $\Delta=b^2-4ac=(-10)^2-4\cdot 1\cdot 12=52$, $x_{1,\,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=$ $=\dfrac{-(-10)\pm\sqrt{52}}{2\cdot 1}=\dfrac{10\pm 2\sqrt{13}}{2}=5\pm\sqrt{13}$. Deoarece $3^2=9<13<16=4^2 \Rightarrow\ 3<\sqrt{13}<4$.

Din $3<\sqrt{13}<4\ \left|+5\right. \Rightarrow\ 8<5+\sqrt{13}<9$.

Din $3<\sqrt{13}<4\left|\cdot(-1)\right. \Rightarrow -4<-\sqrt{13}<-3\left|+5\right. \Rightarrow 1<5-\sqrt{13}<2$. Avem $x\in\mathbb{Z}$ şi $x^2-10x+12\le 0 \Leftrightarrow\ x\in\left[5-\sqrt{13},\ 5+\sqrt{13}\right]\cap\mathbb{Z}=\ \{2,3,4,5,6,7,8\}$, deoarece, din inegalităţile $1<5-\sqrt{13}<2$ şi $8<5+\sqrt{13}<9$, deducem că $[2,8]\subset\left[5-\sqrt{13},5+\sqrt{13}\right]\subset[1,9]$, incluziunile fiind stricte.

3. Avem $3\log_2 x=y \Leftrightarrow\ \log_2 x=\dfrac{y}{3} \Leftrightarrow\ \ x=2^{\frac{y}{3}}$, deci $f^{-1}(y)=x=2^{\frac{y}{3}}$ sau, folosind tot variabila x, $f^{-1}(x)=2^{\frac{x}{3}}=\sqrt[3]{2^x}$, unde $f^{-1}:(0,\infty)\to(1,\infty)$.

4. Observăm că valoarea comună $f(1)=f(4)\in\{1,2,3,4\}$ poate fi aleasă în 4 moduri posibile, iar valorile $f(2), f(3)\in\{1,2,3,4\}$ pot fi alese fiecare în 4 moduri posibile, deci există $4\cdot4\cdot4=64$ funcţii care îndeplinesc condiţiile cerute.

5. Fie M mijlocul diagonalei AC. Avem $x_M=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{-2+8}{2}=3$ şi $y_M=\frac{y_A+y_C}{2}=$

$=\frac{9+(-3)}{2}=3$.

ABCD paralelogram dacă şi numai dacă diagonalele AC şi BD au acelaşi punct ca mijloc, deci $M(3,3)$ este mijloc şi pentru BD.

Avem $x_M=\frac{x_B+x_D}{2}\Leftrightarrow 3=\frac{7+x_D}{2}\Rightarrow x_D=-1$ şi $y_M=\frac{y_B+y_D}{2}\Leftrightarrow 3=\frac{-4+y_D}{2}\Rightarrow y_D=10$, deci coordonatele punctului D sunt $(x_D,\ y_D)=(-1,\ 10)$.

6. Conform teoremei sinusului, $AC=2R\sin B=2\cdot1\cdot\sin\frac{\ }{3}=\sqrt{3}$.

Varianta 6

1. Să se calculeze suma tuturor numerelor naturale de două cifre care se divid cu 11.

2. Să se determine funcţia f de gradul al doilea ştiind că $f(-1)=1$, $f(0)=1$, $f(1)=3$.

3. Să se rezolve în mulţimea $(0,\ \ )$ ecuaţia $\sin 3x=\sin x$.

4. Câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma cu elemente ale mulţimii $\{2,4,6,8\}$?

5. Se consideră triunghiul ABC cu vârfurile în $A(1,2)$, $B(2,-2)$ şi $C(4,6)$. Să se calculeze $\cos B$.

6. Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC, ştiind că $C=\frac{\ }{6}$ şi $AB=6$.

Rezolvări

1. $S=11+22+\cdots+99=11\cdot(1+2+\cdots+9)=11\cdot\frac{(1+9)\cdot9}{2}=495$.

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$, unde $a\in\mathbb{R}^*$ şi $b,c\in\mathbb{R}$. Avem $f(-1)=1\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a(-1)^2+b(-1)+c=1\Leftrightarrow a-b+c=1$, $f(0)=1\Leftrightarrow a\cdot0^2+b\cdot0+c=1\Leftrightarrow c=1$ şi $f(1)=3\Leftrightarrow a\cdot1^2+b\cdot1+c=3\Leftrightarrow a+b+c=3$. Folosind faptul că avem $c=1$, celelalte două relaţii devin $a-b=0$ şi $a+b=2$, de unde deducem că $a=b=1$, deci $f(x)=ax^2+bx+c=$ $=1\cdot x^2+1\cdot x+1=x^2+x+1$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

3. Avem $\sin 3x = \sin x \Leftrightarrow \sin 3x - \sin x = 0 \Leftrightarrow 2\sin\frac{3x-x}{2}\cos\frac{3x+x}{2} = 0 \Leftrightarrow 2\sin x\cos 2x = 0$,

deci $\sin x = 0 \Rightarrow x \in \{\ k \ \mid k \in \mathbb{Z}\} \cap (0,\ ) = \varnothing$, respectiv $\cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = \frac{}{2} + k \ \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{(2k+1)}{4} \Rightarrow x \in \left\{ \frac{(2k+1)}{4} \ \middle|\ k \in \mathbb{Z} \right\} \cap (0,\ ) = \left\{ \frac{}{4}, \frac{3}{4} \right\}.$$

4. Fie $M = \{2,4,6,8\}$. Observăm că $|M| = 4$, deci putem forma $A_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 24$ de numere cu trei cifre distincte alese dintre cifrele 2, 4, 6 sau 8.

5. Avem $AB = \sqrt{(1-2)^2 + [2-(-2)]^2} = \sqrt{17}$, $AC = \sqrt{(1-4)^2 + (2-6)^2} = 5$,

$BC = \sqrt{(2-4)^2 + (-2-6)^2} = 2\sqrt{17}$. Conform teoremei cosinusului, avem

$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{17+68-25}{2\sqrt{17}\cdot 2\sqrt{17}} = \frac{60}{4\cdot 17} = \frac{15}{17}.$$

6. Conform teoremei sinusului, avem $2R = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow 2R = \frac{6}{\sin\frac{}{6}} = \frac{6}{\frac{1}{2}} \Rightarrow R = 6$.

Varianta 7

1. Să se calculeze modulul numărului complex $z = \frac{8+i}{7-4i}$.

2. Să se determine valoarea maximă a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 6x - 9$.

3. Să se rezolve în mulţimea $[0, 2\ )$ ecuaţia $\sin x = -\frac{1}{2}$.

4. Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care mulţimea $\{1, 2, \cdots, n\}$ are exact 120 de submulţimi cu două elemente.

5. Se ştie că, în triunghiul ABC, vectorii $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ şi $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ au acelaşi modul. Să se demonstreze că triunghiul ABC este dreptunghic.

6. Să se calculeze lungimea razei cercului înscris în triunghiul ABC care are lungimile laturilor egale cu 3, 4 şi 5.

Rezolvări

1. $|z| = \left|\frac{8+i}{7-4i}\right| = \frac{|8+i|}{|7-4i|} = \frac{\sqrt{8^2+1^2}}{\sqrt{7^2+(-4)^2}} = \frac{\sqrt{65}}{\sqrt{65}} = 1$

2. Observăm că $f(x) = -x^2 + 6x - 9 = -(x-3)^2 \le 0$, cu $f(3) = 0$, deci $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 0$.

3. $\sin x=-\frac{1}{2}\Rightarrow x\in\left\{(-1)^k\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+k\ \middle|\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cap[0,2\ )=\left\{(-1)^{k+1}\frac{}{6}+k\ \middle|\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cap[0,2\ )=$

$=\left\{\frac{}{6}+\ ,-\frac{}{6}+2\ \right\}=\left\{\frac{7}{6},\frac{11}{6}\right\}.$

4. Fie $M=\{1,2,\cdots,n\}$. Avem $|M|=n$ şi mulţimea M admite exact $C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$ submulţimi cu două elemente. Din $C_n^2=120\Rightarrow\frac{n(n-1)}{2}=120\Rightarrow n^2-n-240=0$. Am obţinut astfel o ecuaţie de gradul al II-lea cu $a=1$, $b=-1$, $c=-240$, $\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-240)=$ $=961=31^2>0$, deci ecuaţia admite două rădăcini reale distincte $n_{1,\,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1\pm31}{2}$, adică $n_1=\frac{1-31}{2}=-15\notin\mathbb{N}$, respectiv $n_2=\frac{1+31}{2}=16\in\mathbb{N}$ şi $16\geq2$. În concluzie, $n=16$.

5. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|^2=\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|^2\Rightarrow\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)^2=\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)^2\Rightarrow$

$\Rightarrow\left(\overrightarrow{AB}\right)^2+\left(\overrightarrow{AC}\right)^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{AB}\right)^2+\left(\overrightarrow{AC}\right)^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0\Rightarrow\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}\Rightarrow$

triunghiul ABC este dreptunghic, cu $m\left(\hat{A}\right)=90^\circ$.

6. Observăm că $5^2=3^2+4^2$, deci triunghiul ABC este dreptunghic cu ipotenuza de lungime 5 şi catetele de lungimi 3, respectiv 4. Avem $S[ABC]=\frac{3\cdot4}{2}=6$. Pe de altă parte, avem $S[ABC]=r\cdot p$, unde r este raza cercului înscris, iar $p=\frac{AB+AC+BC}{2}=\frac{3+4+5}{2}=6$ este semiperimetrul triunghiului. Obţinem $6=r\cdot6\Rightarrow\ r=1$.

Varianta 8

1. Să se rezolve în mulţimea numerelor complexe ecuaţia $z^2=-4$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+x+c$. Ştiind că punctele $A(1,2)$ şi $B(0,3)$ aparţin graficului funcţiei f, să se determine numerele reale a şi c.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt[3]{7x+1}-x=1$.

4. Câte numere naturale de patru cifre distincte se pot forma cu cifre din mulţimea $\{1,3,5,7,9\}$?

5. Se consideră paralelogramul ABCD şi punctele E şi F astfel încât $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{DF}=2\overrightarrow{FE}$. Să se demonstreze că punctele A, F şi C sunt coliniare.

6. Fie triunghiul ABC. Să se calculeze lungimea înălţimii corespunzătoare laturii BC ştiind că $AB=13$, $AC=14$ şi $BC=15$.

Rezolvări

1. Avem $z^2=-4=(2i)^2 \Rightarrow z_{1,2}=\pm 2i$.

2. Avem $A(1,2)\in G_f \Leftrightarrow f(1)=2 \Leftrightarrow a\cdot 1^2+1+c=2 \Leftrightarrow a+c=1$, respectiv $B(0,3)\in G_f \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f(0)=3 \Leftrightarrow a\cdot 0^2+0+c=3 \Leftrightarrow c=3$. Din $a+c=1 \Rightarrow a=1-c=1-3=-2$.
Deci $a=-2$ şi $c=3$.

3. $\sqrt[3]{7x+1}-x=1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{7x+1}=x+1 \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{7x+1}\right)^3=(x+1)^3 \Leftrightarrow 7x+1=x^3+3x^2+3x+1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^3+3x^2-4x=0 \Leftrightarrow x\left(x^2+3x-4\right)=x(x-1)(x+4)=0$, cu soluţiile $S=\{-4,0,1\}$.

4. Fie $M=\{1,3,5,7,9\}$. Observăm că $|M|=5$, deci putem forma $A_5^4=\dfrac{5!}{(5-4)!}=\dfrac{5!}{1!}=120$ de numere de patru cifre distincte alese din mulţimea M.

5. Avem $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EB} \Rightarrow 2\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ şi $\overrightarrow{DF}=2\overrightarrow{FE} \Rightarrow \overrightarrow{FD}=2\overrightarrow{EF}$. Atunci $\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DC}=$
$=2\overrightarrow{EF}+2\overrightarrow{AE}=2\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}\right)=2\overrightarrow{AF} \Rightarrow \overrightarrow{FC}=2\overrightarrow{AF}$, de unde deducem că punctele A, F, C sunt coliniare.

6. Notăm $BC=a$, $AC=b$ şi $AB=c$. Avem $a=15$, $b=14$, $c=13$, $p=\dfrac{a+b+c}{2}=21$.

Conform formulei lui Heron, $S[ABC]=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=$
$=\sqrt{21(21-15)(21-14)(21-13)}=\sqrt{21\cdot 6\cdot 7\cdot 8}=\sqrt{2^4\cdot 3^2\cdot 7^2}=2^2\cdot 3\cdot 7=84$.

Pe de altă parte, $S[ABC]=\dfrac{a\cdot h_a}{2}$, unde h_a reprezintă lungimea înălţimii corespunzătoare laturii BC, a cărei lungime a fost notată cu „a”. Deci $84=\dfrac{15\cdot h_a}{2} \Rightarrow h_a=\dfrac{56}{5}$.

Varianta 9

1. Să se determine numărul natural x pentru care $1+3+5+\dots+x=225$.

2. Să se determine valorile parametrului real m ştiind că graficul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+mx-2m$ intersectează axa Ox în două puncte situate la distanţa 3.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2\left(2^{-x+1}+1\right)=x$.

4. Să se arate că $C_{17}^3>C_{17}^{15}$.

5. Fie hexagonul regulat ABCDEF de latură 4. Să se calculeze modulul vectorului $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$.

6. Să se arate că $\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\dots+\sin^2 90^\circ=\dfrac{91}{2}$.

Rezolvări

1. Termenii sumei aparţin unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, cu $a_1 = 1$ şi $r = a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2$. Avem $a_n = a_1 + (n-1)\cdot r = 1 + 2(n-1) = 2n - 1$, pentru $\forall n \in \mathbb{N}^*$, deci $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \dfrac{(a_1 + a_2)\cdot n}{2} = \dfrac{(1 + 2n - 1)\cdot n}{2} = n^2$. Pentru $S_n = 225 \Rightarrow n^2 = 225 \Rightarrow$ $\Rightarrow n = 15$, deci $x = a_{15} = 2\cdot 15 - 1 = 29$.

2. Graficul funcţiei f intersectează axa Ox în două puncte distincte dacă şi numai dacă funcţia admite două rădăcini reale distincte, adică $\Delta = m^2 + 8m > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty, -8) \cup (0, \infty)$. În această situaţie, punctele de intersecţie dintre G_f şi Ox sunt $M_1(x_1, 0)$ şi $M_2(x_2, 0)$. Observăm că $M_1M_2 = |x_1 - x_2|$. Avem $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = -m$ şi $P = \dfrac{c}{a} = -2m$. Din $M_1M_2 = 3 \Rightarrow$ $\Rightarrow |x_1 - x_2| = 3 \Rightarrow |x_1 - x_2|^2 = 3^2 = 9 \Rightarrow S^2 - 4P = m^2 + 8m = 9 \Rightarrow m^2 + 8m - 9 = 0$, cu soluţiile $m_1 = -9$, respectiv $m_2 = 1$, deci $m \in \{-9, 1\} \subset (-\infty, -8) \cup (0, \infty)$.

3. Observăm că $2^{-x+1} + 1 > 0$ este îndeplinită pentru $\forall x \in \mathbb{R}$. Atunci $\log_2\left(2^{-x+1} + 1\right) = x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2^{-x+1} + 1 = 2^x \,\big|\cdot 2^x \Leftrightarrow 2 + 2^x = 2^{2x} \Leftrightarrow 2^{2x} - 2^x - 2 = 0$. Folosind notaţia $2^x = y$, $y > 0$, ecuaţia devine $y^2 - y - 2 = 0$, cu soluţiile $y_1 = -1 \notin (0, \infty)$ şi $y_2 = 2 \in (0, \infty)$. Revenind la notaţia $2^x = y$, obţinem $2^x = 2 \Rightarrow x = 1$.

4. Avem $C_{17}^3 = \dfrac{17!}{3!\cdot(17-3)!} = \dfrac{17!}{3!\cdot 14!} = \dfrac{14!\cdot 15\cdot 16\cdot 17}{3!\cdot 14!} = \dfrac{15\cdot 16\cdot 17}{1\cdot 2\cdot 3} = 5\cdot\dfrac{16\cdot 17}{1\cdot 2}$ şi $C_{17}^{15} = \dfrac{17!}{15!\cdot(17-15)!} = \dfrac{17!}{15!\cdot 2!} = \dfrac{16\cdot 17}{2}$. Evident că $5\cdot\dfrac{16\cdot 17}{2} > \dfrac{16\cdot 17}{2}$, deci $C_{17}^3 > C_{17}^{15}$.

5. Suma unghiurilor unui poligon convex cu n laturi este $(n-2)\quad$.

În cazul poligonului regulat, unghiurile sale sunt congruente, având măsura comună $\dfrac{(n-2)}{n}$.

Pentru $n = 6$ (cazul hexagonului regulat), obţinem $\dfrac{(6-2)}{6} = \dfrac{2}{3}$. Aplicând teorema lui Pitagora generalizată în triunghiul ABC, obţinem $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\cdot BC\cdot\cos\hat{B} =$ $= 4^2 + 4^2 - 2\cdot 4^2\cos\dfrac{2}{3} = 48 \Rightarrow AC = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$. Similar obţinem $AE = CE = 4\sqrt{3}$, deci triunghiul ACE este echilateral. Observând că $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AE}$, obţinem că $\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right)^2 =$

$$= \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}\right)^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AE}^2 + 2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE} = \left(4\sqrt{3}\right)^2 + \left(4\sqrt{3}\right)^2 + 2\left(4\sqrt{3}\right)^2\cos\left(\widehat{CAE}\right) =$$

$$= 2\cdot 48 + 2\cdot 48\cdot\cos\frac{\ }{3} = 144,$$ deci $\left|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right| = \sqrt{\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right)^2} = \sqrt{144} = 12$.

6. Avem $\sin\left(90^\circ - x\right) = \cos x$, $\forall x \in \left[0^0, 90^\circ\right]$, deci $\sin^2 x + \sin^2\left(90^\circ - x\right) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$, pentru $\forall x \in \left[0^\circ, 90^\circ\right]$.

Fie $S = \sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \cdots + \sin^2 90^\circ = \sin^2 0^\circ + \sin^2 1^\circ + \cdots + \sin^2 89^\circ + \sin^2 90^\circ$. Observăm că putem scrie şi $S = \sin^2 90^\circ + \sin^2 89^\circ + \cdots + \sin^2 1^\circ + \sin^2 0^\circ$. Adunând membru cu membru cele două relaţii, obţinem

$$2S = \left(\sin^2 0^\circ + \sin^2 90^\circ\right) + \left(\sin^2 1^\circ + \sin^2 89^\circ\right) + \cdots + \left(\sin^2 90^\circ + \sin^2 0^\circ\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{90}\left(\sin^2 k^\circ + \sin^2\left(90^\circ - k^\circ\right)\right) = \sum_{k=0}^{90} 1 = 91 \Rightarrow 2S = 91 \Rightarrow S = \frac{91}{2}.$$

Varianta 10

1. Ştiind că $z \in \mathbb{C}$ şi că $z^2 + z + 1 = 0$, să se calculeze $z^4 + \frac{1}{z^4}$.

2. Să se determine funcţia f de gradul întâi, pentru care $f\left(f\left(x\right)\right) = 2f\left(x\right) + 1$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\lg\left(x+1\right) - \lg 9 = 1 - \lg x$.

4. Să se determine numărul termenilor raţionali din dezvoltarea $\left(3 + \sqrt[3]{3}\right)^{10}$.

5. Să se determine coordonatele centrului de greutate al triunghiului ABC, ştiind că $A\left(-1,0\right)$, $B\left(0,2\right)$, $C\left(2,-1\right)$.

6. Să se arate că unghiul vectorilor $\vec{u} = 5\vec{i} - 4\vec{j}$ şi $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ este obtuz.

Rezolvări

1. Se observă că ecuaţia $z^2 + z + 1 = 0$ nu admite rădăcinile $z = 0$ sau $z = 1$.

Din $z^2 + z + 1 = 0 \; \big| : z \Rightarrow z + 1 + \frac{1}{z} = 0 \Rightarrow z + \frac{1}{z} = -1$ şi $z^2 + z + 1 = 0 \; \big| \cdot (z-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow z^3 - 1 = 0 \Rightarrow z^3 = 1 \Rightarrow z^4 = z^3 \cdot z = 1 \cdot z = z$. Deci $z^4 + \frac{1}{z^4} = z + \frac{1}{z} = -1$.

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f\left(x\right) = ax + b$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$, o funcţie de gradul întâi.

Avem $f\left(f\left(x\right)\right) = af\left(x\right) + b = a\left(ax+b\right) = a^2x + ab + b$ şi $2f\left(x\right) + 1 = 2\left(ax+b\right) + 1 =$ $= 2ax + 2b + 1$, deci $f\left(f\left(x\right)\right) = 2f\left(x\right) + 1 \Rightarrow a^2x + ab + g = 2ax + 2b + 1$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = 2a \\ ab + b = 2b + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ 3b = 2b + 1 \end{cases} \Rightarrow a = 2 \text{ şi } b = 1, \text{ deci } f\left(x\right) = ax + b = 2x + 1, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

3. Se impun condiţiile $x+1>0 \Leftrightarrow \ x \in (-1,+\infty)$ şi $x>0 \Leftrightarrow \ x \in (0,+\infty)$, deci $x \in (-1,+\infty) \bigcap (0,+\infty) = \ (0,+\infty)$. Avem $\lg(x+1)-\lg 9 = 1-\lg x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \lg(x+1)+\lg x = 1+\lg 9 \Rightarrow \lg(x+1)x = \lg 90 \Rightarrow (x+1)x = 90 \Rightarrow x^2+x-90=0$.

Am obţinut astfel o ecuaţie de gradul al II-lea cu $a=1$, $b=1$, $c=-90$, $\Delta = b^2-4ac =$ $=1^2-4\cdot1\cdot(-90) = \ 361 = 19^2 > 0$, deci ecuaţia admite două rădăcini reale distincte

$x_{1,\,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \ \dfrac{-1\pm19}{2}$, adică $x_1 = \dfrac{-1-19}{2} = -10 \notin (0,\infty)$, respectiv

$x_2 = \dfrac{-1+19}{2} = 9 \in (0,\infty)$. În concluzie, ecuaţia admite soluţia $x=9$.

4. Avem $\sqrt[3]{3} \notin \mathbb{Q}$ şi $T_{k+1} = C_{10}^{k} \quad 3^{10-k}\left(\sqrt[3]{3}\right)^{k}$, $k=\overline{0,10}$, formula termenului general din dezvoltarea expresiei $\left(3+\sqrt[3]{3}\right)^{10}$ după binomul lui Newton. Avem $T_{k+1} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \ \left(\sqrt[3]{3}\right)^{k} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow k \in \{0,1,\cdots,10\} \cap (3\mathbb{Z}) = \ \{0,3,6,9\}$, deci dezvoltarea conţine 4 termeni raţionali, ceilalţi $11-4=7$ termeni fiind iraţionali.

5. Fie $G(x_G, y_G)$ centrul de greutate al triunghiului ABC. Avem $x_G = \dfrac{x_A+x_B+x_C}{3} = \dfrac{1}{3}$, respectiv $y_G = \dfrac{y_A+y_B+y_C}{3} = \dfrac{1}{3}$, deci coordonatele centrului de greutate sunt

$(x_G, y_G) = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$.

6. Avem $\vec{u}\cdot\vec{v} = \left(5\vec{i}-4\vec{j}\right)\cdot\left(2\vec{i}+3\vec{j}\right) = \ 5\cdot2+(-4)\cdot3 = -2 < 0$, deci $\cos\left(\sphericalangle(\vec{u},\vec{v})\right) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} < 0$, de unde deducem că vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ formează un unghi obtuz.

Varianta 11

1. Să se determine a, b$\in \mathbb{R}$, ştiind că numerele 2, a, b sunt în progresie geometrică şi 2, 17, a sunt în progresie aritmetică.

2. Să se rezolve ecuaţia $f(f(x)) = 0$, ştiind că $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = -3x+2$.

3. Să se rezolve în mulţimea $[0,2\ \ )$ ecuaţia $\operatorname{tg}(-x) = 1-2\operatorname{tg}x$.

4. Să se determine numărul funcţiilor $f:\{0,1,2\}\to\{0,1,2\}$ care verifică relaţia $f(2)=2$.

5. Se consideră triunghiul ABC şi punctele D, E astfel încât $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{EC}$. Să se arate că dreptele DE şi BC sunt paralele.

6. Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC, dacă $A = \dfrac{\ }{4}$, $B = \dfrac{\ }{6}$ şi $AB = 6$.

Rezolvări

1. Avem $\div 2,17,a \Leftrightarrow 17=\frac{2+a}{2} \Leftrightarrow a=32$ şi $\div\div 2,a,b \Leftrightarrow a^2=2b \Leftrightarrow 32^2=2b \Leftrightarrow b=512$, deci $a=32$ şi $b=512$.

2. Avem $f\left(f\left(x\right)\right)=-3f\left(x\right)+2=-3\cdot\left(-3x+2\right)+2=9x-4$ pentru $\forall x\in\mathbb{R}$, deci

$f\left(f\left(x\right)\right)=0 \Leftrightarrow 9x-4=0 \Leftrightarrow x=\frac{4}{9}$.

3. Avem $tg\left(-x\right)=1-2tgx \Leftrightarrow -tgx=1-2tgx \Leftrightarrow tgx=1 \Leftrightarrow x\in\left\{\frac{\ }{4}+k\ \middle|\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cap\left[0,2\ \right)=$

$=\left\{\frac{\ }{4},\frac{5\ }{4}\right\}$.

4. Valorile $f\left(0\right)$, $f\left(1\right)\in\left\{0,1,2\right\}$ pot fi alese fiecare în 3 moduri posibile, deci avem $3\cdot 3=9$ funcţii cu proprietatea cerută.

5. Din $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}=2$ deducem, conform reciprocei teoremei lui Thales, că avem $DE\parallel BC$.

6. Avem $C=\ \ -\left(A+B\right)$, deci $\sin C=\sin\left[\ \ -\left(A+B\right)\right]=\sin\left(A+B\right)=\sin\left(\frac{\ }{4}+\frac{\ }{6}\right)=$

$=\sin\frac{\ }{4}\cos\frac{\ }{6}+\cos\frac{\ }{4}\sin\frac{\ }{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. Conform teoremei sinusurilor,

$2R=\frac{AB}{\sin C}=\frac{6}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}=\frac{24}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{24\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4}=6\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\Rightarrow R=3\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC.

Varianta 12

1. Să se calculeze $\frac{1}{1+i}+\frac{1}{1-i}$.

2. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}=\frac{7}{6}$.

3. Să se rezolve în mulţimea $\left[0,2\ \right)$ ecuaţia $\cos 2x=\frac{1}{2}$.

4. Să se determine $a>0$, ştiind că termenul din mijloc al dezvoltării $\left(\sqrt[3]{a}+\frac{1}{\sqrt[4]{a}}\right)^{12}$ este egal cu 1848.

5. Să se determine ecuaţia simetricei dreptei $d:\ 2x-3y+1=0$ faţă de punctul $A\left(-3,4\right)$.

6. Ştiind că $ctgx=3$, să se calculeze $ctg2x$.

Rezolvări

1. Avem $\frac{1}{1+i}+\frac{1}{1-i}=\frac{1-i+1+i}{(1+i)(1-i)}=\frac{2}{1^2+1^2}=\frac{2}{2}=1$.

2. Se impun condiţiile $x+2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -2$ şi $x+3\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -3$, deci $x\in\mathbb{R}-\{-3,-2\}$.

Din $\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}=\frac{7}{6}\Big|\cdot 6(x+2)(x+3) \Rightarrow 6(x+1)(x+3)+6(x+2)^2=7(x+2)(x+3)\Rightarrow$

$\Rightarrow 6\left(2x^2+8x+7\right)=7\left(x^2+5x+6\right)\Rightarrow 5x^2+13x=0$, cu soluţiile $S=\left\{-\frac{13}{5},0\right\}\subset\mathbb{R}-\{-3,-2\}$.

3. Avem $\cos 2x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2x=\pm\arccos\left(\frac{1}{2}\right)+2k\ \ =\pm\frac{}{3}+2k \ \Leftrightarrow x=\pm\frac{}{6}+k$, unde $k\in\mathbb{Z}$.

Deci $x\in\left\{\pm\frac{}{6}+k\ \middle|\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cap[0,2\ )=\left\{\frac{}{6},-\frac{}{6}+\ ,\frac{}{6}+\ ,-\frac{}{6}+2\ \right\}=\left\{\frac{}{6},\frac{5}{6},\frac{7}{6},\frac{11}{6}\right\}$.

4. Dezvoltarea după binomul lui Newton a expresiei $\left(\sqrt[3]{a}+\frac{1}{\sqrt[a]{a}}\right)^{12}$ conţine $12+1=13$ termeni,

iar termenul din mijloc este $T_7=C_{12}^6\left(\sqrt[3]{a}\right)^6\left(\frac{1}{\sqrt[4]{a}}\right)^6=C_{12}^6\frac{a^2}{a\sqrt{a}}=C_{12}^6\cdot\sqrt{a}$, unde

$C_{12}^6=\frac{12!}{6!\cdot(12-6)!}=\frac{12!}{6!\cdot 6!}=\frac{6!\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{6!\cdot 6!}=\frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}=7\cdot 4\cdot 3\cdot 11=924$.

Din $T_7=924\sqrt{a}=1848$, obţinem $\sqrt{a}=\frac{1848}{924}=2\Rightarrow a=2^2=4$.

5. Observăm că $2x-3y+1=0\Leftrightarrow y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$, deci $m=\frac{2}{3}$, unde $m=\text{panta}(d)$. Avem, de exemplu, punctul $B(1,1)\in d$, deoarece $2x_B-3y_B+1=2\cdot 1-3\cdot 1+1=0$. Fie C simetricul lui $B(1,1)$ faţă de $A(-3,4)$, deci A este mijlocul segmentului BC, adică $x_A=\frac{x_B+x_C}{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow -3=\frac{1+x_C}{2}\Rightarrow x_C=-7$, respectiv $y_A=\frac{y_A+y_C}{2}\Rightarrow 4=\frac{1+y_C}{2}\Rightarrow y_C=7$, deci coordonatele punctului C sunt $(x_C,y_C)=(-7,7)$. Simetrica dreptei d faţă de punctul A este o dreaptă d', $d'\parallel d$, care trece prin simetricul puctului $B\in d$ faţă de punctul A, respectiv prin punctul C. Din $d'\parallel d\Rightarrow m'=m=\frac{2}{3}$, unde $m'=\text{panta}(d')$. Din $C(-7,7)\in d'\Rightarrow$

$\Rightarrow y-y_C=m'(x-x_C)\Rightarrow y-7=\frac{2}{3}(x+7)\Rightarrow 2x-3y+35=0$. Deci dreapta căutată are ecuaţia $d':2x-3y+35=0$.

6. Avem $\text{ctg}2x=\frac{\text{ctg}^2x-1}{2\text{ctg}x}=\frac{3^2-1}{2\cdot 3}=\frac{4}{3}$.

Varianta 13

1. Să se arate că numărul $\left(1+i\sqrt{3}\right)^2+\left(1-i\sqrt{3}\right)^2$ este număr întreg.

2. Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=3 \end{cases}$.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x=6\left(\sqrt{x-2}-1\right)$.

4. Să se determine termenul care nu conţine pe x din dezvoltarea $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^9$.

5. Să se calculeze distanţa de la punctul $A(3,0)$ la dreapta $d:\ 3x-4y+1=0$.

6. Triunghiul ABC are $AB=4$, $BC=5$ şi $CA=6$. Să se arate că $m(\sphericalangle B)=2m(\sphericalangle C)$.

Rezolvări

1. Avem $\left(1+i\sqrt{3}\right)^2+\left(1-i\sqrt{3}\right)^2 = 1^2+2\cdot1\cdot i\sqrt{3}+\left(i\sqrt{3}\right)^2+1^2-2\cdot1\cdot i\sqrt{3}+\left(i\sqrt{3}\right)^2=$
$=2(1-3)=-4\in\mathbb{Z}$.

2. Folosind notaţiile $S=x+y=4$ şi $P=xy=3$, observăm că x şi y sunt soluţiile ecuaţiei $t^2-St+P=t^2-4t+3=0$. Avem $a=1$, $b=-4$, $c=3$, $\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\cdot1\cdot3=4$, deci $t_{1,\,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{4\pm2}{2}=2\pm1$, adică $t_1=2-1=1$, respectiv $t_2=2+1=3$.

Deci $(x,y)\in\{(1,3),(3,1)\}$.

3. Se impune condiţia $x-2\geq0\Leftrightarrow x\in[2,\infty)$. Avem $x=6\left(\sqrt{x-2}-1\right)\Leftrightarrow x+6=6\sqrt{x-2}\Rightarrow$
$\Rightarrow(x+6)^2=6(x-2)\Rightarrow x^2-24x+108=0$, cu soluţiile $x_{1,\,2}=12\pm6$, adică $S=\{6,18\}\subset[2,\infty)$.

4. Termenul general din dezvoltarea $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^9$ este $T_{k+1}=C_9^k\left(x^2\right)^{9-k}\left(\frac{1}{x}\right)^k = C_9^k x^{18-3k}$, unde $k=\overline{0,9}$. Termenul care nu-l conţine pe x este cel în care exponentul lui x este 0, adică termenul pentru care $18-3k=0\Leftrightarrow k=6$, deci $T_{6+1}=T_7$. Avem $T_7=C_9^6=\dfrac{9!}{6!\cdot(9-6)!}=\dfrac{9!}{6!\cdot3!}=$
$=\dfrac{6!\cdot7\cdot8\cdot9}{6!\cdot3!}=\dfrac{7\cdot8\cdot9}{1\cdot2\cdot3}=7\cdot4\cdot3=84$.

5. $\operatorname{dist}(A,d)=\dfrac{|3\cdot3-4\cdot0+1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{10}{5}=2$.

6. Avem $\cos B=\dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\dfrac{4^2+5^2-6^2}{2\cdot4\cdot5}=\dfrac{1}{8}$ şi $\cos C=\dfrac{AC^2+BC^2-AB^2}{2AC\cdot BC}=$

$=\dfrac{6^2+5^2-4^2}{2\cdot6\cdot5}=\dfrac{3}{4}$. De asemenea, $\cos^2\dfrac{B}{2}=\dfrac{1+\cos B}{2}=\dfrac{9}{16}\Rightarrow\cos\dfrac{B}{2}=\dfrac{3}{4}=\cos C\Rightarrow$

$\Rightarrow\dfrac{B}{2}=C\Rightarrow B=2C$, unde am folosit faptul că funcţia $\cos:[0,\ \ ]\to[-1,1]$ este injectivă, iar

$\cos\dfrac{B}{2}>0$, deoarece $\dfrac{B}{2}\in\left(0,\dfrac{}{2}\right)$.

Varianta 14

1. Să se calculeze $\lg\dfrac{1}{2}+\lg\dfrac{2}{3}+\lg\dfrac{3}{4}+\dots+\lg\dfrac{99}{100}$.

2. Să se determine $a\in\mathbb{R}^*$ pentru care $(a-3)x^2-ax-a<0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt[3]{8-x}=\sqrt[3]{9-4x}$.

4. Să se determine numărul elementelor unei mulţimi, ştiind că aceasta are exact 45 de submulţimi cu două elemente.

5. Să se determine ecuaţia dreptei AB, ştiind că $A(2,3)$ şi $B(-5,4)$.

6. Triunghiul ABC ascuţitunghic are $AC=2\sqrt{3}$ şi lungimea razei cercului circumscris egală cu 2. Să se determine măsura unghiului B.

Rezolvări

1. Avem $\lg\dfrac{1}{2}+\lg\dfrac{2}{3}+\lg\dfrac{3}{4}+\dots+\lg\dfrac{99}{100}=\lg\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\dfrac{99}{100}\right)=\lg\left(\dfrac{1}{100}\right)=-2$.

2. Se impun condiţiile $a-3<0\Leftrightarrow a\in(-\infty,3)$ şi $\Delta=(-a)^2-4(a-3)(-a)=a(5a-12)<0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a\in(-\infty,0)\cup\left(\dfrac{12}{5},\infty\right)$. Deci $a\in(-\infty,3)\cap\left[(-\infty,0)\cup\left(\dfrac{12}{5},\infty\right)\right]=(-\infty,0)$.

3. $\sqrt[3]{8-x}=\sqrt[3]{9-4x}\Leftrightarrow 8-x=9-4x\Leftrightarrow 3x=1\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$.

4. Fie $n\in\mathbb{N}$ numărul elementelor mulţimii. Atunci mulţimea admite exact $C_n^2=\dfrac{n(n-1)}{2}$ submulţimi cu două elemente, în ipoteza că $n\geq2$. Deci $C_n^2=45\Leftrightarrow\dfrac{n(n-1)}{2}=45\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n^2-n-90=0\Rightarrow n_{1,2}=\dfrac{1\pm19}{2}$, adică $n_1=\dfrac{1-19}{2}=-9\notin\mathbb{N}$, respectiv $n_2=\dfrac{1+19}{2}=10\in\mathbb{N}$ şi $10\geq2$. În concluzie, mulţimea are $n=10$ elemente.

5. Avem $x_A \neq x_B$ şi $y_A \neq y_B$, deci (AB): $\dfrac{y-y_A}{y_B-y_A}=\dfrac{x-x_A}{x_B-x_A} \Leftrightarrow \dfrac{y-3}{4-3}=\dfrac{x-2}{-5-2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{y-3}{1}=\dfrac{x-2}{-7} \Leftrightarrow$ $x+7y-23=0$, deci ecuaţia dreptei AB este $x+7y-23=0$.

6. Conform teoremei sinusurilor, $2R=\dfrac{AC}{\sin B} \Leftrightarrow \sin B=\dfrac{AC}{2R} \Leftrightarrow \sin B=\dfrac{2\sqrt{3}}{2\cdot 2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow B=\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{\;}{3}$, deoarece, prin ipoteză, triunghiul este ascuţitunghic.

Varianta 15

1. Să se calculeze $\log_3\left(5-\sqrt{7}\right)+\log_3\left(5+\sqrt{7}\right)-\log_3 2$.

2. Să se determine funcţia de gradul al doilea al cărei grafic este tangent la axa Ox în punctul $(1,0)$ şi trece prin punctul $(0,2)$.

3. Să se rezolve în mulţimea $[0,2\;\;)$ ecuaţia $\sin x+\cos x=0$.

4. Câte numere de patru cifre se pot forma cu elemente ale mulţimii $\{1,3,5,7,9\}$?

5. Să se determine ecuaţia dreptei care conţine punctul $A(-2,2)$ şi este paralelă cu dreapta determinată de punctele $C(2,1)$, $D(-1,-3)$.

6. Fie $\;\in\left(\;,\dfrac{3\;}{2}\right)$ astfel încât $\cos\;=-\dfrac{5}{13}$. Să se calculeze $\sin\;$.

Rezolvări

1. $\log_3\left(5-\sqrt{7}\right)+\log_3\left(5+\sqrt{7}\right)-\log_3 2=\log_3\dfrac{\left(5-\sqrt{7}\right)\left(5+\sqrt{7}\right)}{2}=\log_3 9=2$.

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\in\mathbb{R}^*$, b, c$\in\mathbb{R}$. Graficul este tangent la axa Ox în punctul $(1,0) \Leftrightarrow \Delta=0$ şi coordonatele vârfului sunt $(1,0) \Leftrightarrow \left(-\dfrac{b}{2a},-\dfrac{\Delta}{4a}\right)=(-1,0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b=-2a$ şi $\Delta=0$. Graficul trece prin punctul $(0,2) \Leftrightarrow f(0)=2 \Leftrightarrow c=2$. Avem $b=-2a$, $c=2$ şi $\Delta=0 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=(-2a)^2-4a\cdot 2=4a^2-8a=4a(a-2)=0 \Rightarrow a=2$ şi $b=-2a=-4$. Deci $f(x)=ax^2+bx+c=2x^2-4x+2$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

3. Avem $\sin x+\cos x=0 \Leftrightarrow \sin x+\sin\left(\dfrac{\;}{2}-x\right)=2\sin\dfrac{x+\dfrac{\;}{2}-x}{2}\cos\dfrac{x-\left(\dfrac{\;}{2}-x\right)}{2}=$

$\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\;}{4}\right)=0 \Leftrightarrow \cos\left(x-\dfrac{\;}{4}\right)=0 \Leftrightarrow x-\dfrac{\;}{4}=\pm\arccos 0+2k\;\;=\pm\dfrac{\;}{2}+2k\;\;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{}{4} \pm \frac{}{2} + 2k$, unde $k \in \mathbb{Z}$. Deci $x \in \left\{ \frac{}{4} \pm \frac{}{2} + 2k \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} \cap [0, 2\;\;) =$

$\left\{ \frac{}{4} + \frac{}{2},\; \frac{}{4} - \frac{}{2} + 2\;\; \right\} = \left\{ \frac{3}{4}, \frac{7}{4} \right\}$.

4. Fie $M = \{1,3,5,7,9\}$. Observăm că $|M| = 5$, deci fiecare dintre cele 4 cifre poate fi aleasă în 5 moduri, deci avem $5^4 = 625$ de numere de patru cifre, nu neapărat distincte, care se pot forma cu cifre din mulţimea M.

5. Avem $\text{panta}(CD) = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{-3-1}{-1-2} = \frac{4}{3}$. Fie d dreapta care conţine punctul $A(-2,2)$ şi este paralelă cu CD. Atunci $d \parallel CD \Leftrightarrow m = \text{panta}(CD) = \frac{4}{3}$, unde $m = \text{panta}(d)$.

Din $A(-2,2) \in d \Leftrightarrow y - y_A = m(x - x_A) \Leftrightarrow y - 2 = \frac{4}{3}(x+2) \Leftrightarrow 4x - 3y + 14 = 0$, deci $(d): 4x - 3y + 14 = 0$.

6. Avem $\;\in \left(\;\;, \frac{3}{2}\;\right) \Rightarrow \sin\;\; < 0 \Rightarrow \sin\;\; = -\sqrt{1-\cos^2\;\;} = -\sqrt{1-\left(-\frac{5}{13}\right)^2} = -\frac{12}{13}$.

Varianta 14

1. Să se calculeze modulul numărului complex $z = \frac{2-i}{2+i}$.

2. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care $x^2 + ax + 2 \geq 0$,oricare ar fi numărul real x.

3. Să se rezolve în intervalul $[-1,1]$ ecuaţia $\arcsin\frac{1}{2} + \arcsin x = \frac{}{3}$.

4. Să se rezolve ecuaţia $C_n^8 = C_n^{10}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 10$.

5. Să se afle măsura celui mai mare unghi al triunghiului ABC, ştiind că $A(2,-2)$, $B(2,3)$, $C(-2,3)$.

6. Fie $\;\in \left(\frac{}{2},\;\;\right)$ astfel încât $\sin\;\; = \frac{3}{5}$. Să se calculeze $\sin 2\;\;$.

Rezolvări

1. Avem $|z| = \left|\frac{2-i}{2+i}\right| = \frac{|2-i|}{|2+i|} = \frac{\sqrt{2^2+(-1)^2}}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$.

2. Avem $x^2 + ax + 2 \geq 0$ pentru $\forall x \in \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă $\Delta = a^2 - 8 \leq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a \in \left[-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right]$.

3. Avem $\arcsin\frac{1}{2}+\arcsin x=\frac{}{3} \Leftrightarrow \arcsin x=\frac{}{3}-\arcsin\frac{1}{2}=\frac{}{3}-\frac{}{6}=\frac{}{6}\Rightarrow x=\sin(\arcsin x)=$

$=\sin\frac{}{6}=\frac{1}{2}\in[-1,1]$.

4. Avem $C_n^8=C_n^{10} \Leftrightarrow \frac{n!}{8!\cdot(n-8)!}=\frac{n!}{10!\cdot(n-10)!} \Leftrightarrow \frac{(n-8)!}{(n-10)!}=\frac{10!}{8!} \Leftrightarrow (n-9)(n-8)=9\cdot 10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n^2-17n-18=0$, cu soluţiile $n_1=-1\notin\mathbb{N}$ şi $n_2=18\in\mathbb{N}\cap[10,\infty)$, deci $n=18$ este soluţia căutată.

5. Avem $x_A=x_B=2\Rightarrow AB\parallel Oy$ şi $y_B=y_C=3\Rightarrow BC\parallel Ox$, de unde deducem că $AB\perp BC\Rightarrow m(\hat{B})=90^\circ$ şi, evident, $\hat{B}$ este cel mai mare unghi al triunghiului ABC.

6. Avem $\ \in\left(\frac{}{2},\ \right)\Rightarrow \cos\ <0\Rightarrow \cos\ =-\sqrt{1-\sin^2\ }=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5}$, deci

$\sin 2\ =2\sin\ \cos\ =2\cdot\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{24}{25}$.

Varianta 17

1. Să se arate că numărul $\left(1+i\sqrt{3}\right)^3$ este întreg.

2. Să se determine imaginea funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x+2$.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{-2x+1}=5$.

4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr $\overline{ab}$ din mulţimea numerelor naturale de două cifre, să avem $a+b=4$.

5. Să se determine ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(-1,1)$ şi este perpendiculară pe dreapta $d:\ 5x-4y+1=0$.

6. Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC, ştiind că $AB=6$, $B=\frac{}{4}$ şi $C=\frac{}{6}$.

Rezolvări

1. $z=\left(1+i\sqrt{3}\right)^3=\left[2\left(\cos\frac{}{3}+i\sin\frac{}{3}\right)\right]^3=2^3\left(\cos\ +i\sin\ \right)=8\cdot(-1)=-8\in\mathbb{Z}$.

2. $\operatorname{Im} f=\{y\in\mathbb{R}\mid \exists x\in\mathbb{R}, f(x)=y\}$. Avem $f(x)=y\Leftrightarrow x^2-x+2-y=0$. Am obţinut astfel o ecuaţie de gradul al II-lea în necunoscuta x şi cu parametrul y, ecuaţie care admite soluţii dacă şi numai dacă $\Delta=(-1)^2-4\cdot1\cdot(y-2)=4y-7\ge 0\Leftrightarrow y\in\left[\frac{7}{4},\infty\right)$, deci $\operatorname{Im} f=\left[\frac{7}{4},\infty\right)$.

3. Se impune condiţia $-2x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$. Din $\sqrt{-2x+1}=5 \Rightarrow -2x+1=25 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=-12\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$, deci $x=-12$ este soluţia ecuaţiei.

4. Fie $M=\{10,11,\cdots,99\}$. Observăm că $|M|=99-9=90$. Avem $\overline{ab}\in M$ şi $a+b=4\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{ab}\in M'=\{13,22,31,40\}$, deci $p=\frac{|M'|}{|M|}=\frac{4}{90}=\frac{2}{45}$.

5. Avem $5x-4y+1=0 \Leftrightarrow\ y=\frac{5}{4}x+\frac{1}{4}$, deci $m=\frac{5}{4}$, unde $m=\text{panta}(d)$. Fie d' dreapta care trece prin $A(-1,1)$ şi este perpendiculară pe d. Avem $d'\perp d\Rightarrow\ m'=-\frac{1}{m}=-\frac{4}{5}$, unde $m'=\text{panta}(d')$. Din $A(-1,1)\in d'\Rightarrow\ y-y_A=m'(x-x_A)\Rightarrow\ y-1=-\frac{4}{5}(x+1)\Rightarrow$

$\Rightarrow 4x+5y-1=0$, deci $(d'):\ 4x+5y-1=0$.

6. Conform teoremei sinusurilor, avem $2R=\frac{AB}{\sin C}=\frac{6}{\sin\frac{}{6}}=12\Rightarrow\ R=6$.

Atunci $AC=2R\sin B=\ 2\cdot 6\cdot\sin\frac{}{4}=6\sqrt{2}$. Avem $\sin A=\sin\left[\ \ -(B+C)\right]=\ \sin(B+C)=$

$=\sin\left(\frac{}{4}+\frac{}{6}\right)=\ \sin\frac{}{4}\cos\frac{}{6}+\cos\frac{}{4}\sin\frac{}{6}=\ \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\ \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, deci

$BC=2R\sin A=\ 2\cdot 6\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\ 3\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$. În concluzie, perimetrul triunghiului ABC este

$AB+BC+AC=\ 6+3\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)+6\sqrt{2}=\ 3\left(2+3\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$.

Varianta 18

1. Să se rezolve în mulţimea numerelor complexe ecuaţia $x^2-2x+4=0$.

2. Să se afle valoarea minimă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$.

3. Să se rezolve în intervalul $[-1,1]$ ecuaţia $\arcsin x+\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{}{2}$.

4. Care este probabilitatea ca, alegând un număr k din mulţimea $\{0,1,2,\cdots,7\}$, numărul C_7^k să fie prim?

5. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care vectorii $\vec{u}=a\vec{i}+3\vec{j}$ şi $\vec{v}=4\vec{i}+(a+4)\vec{j}$ sunt coliniari.

6. Să se calculeze $\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\right)$, ştiind că $A(-3,4)$, $B(4,-3)$ şi $C(1,2)$.

Rezolvări

1. Avem $a=1$, $b=-2$, $c=4$, $\Delta=b^2-4ac=$ $(-2)^2-4\cdot1\cdot4=$ $-12<0$, deci

$$x_{1,\,2}=\frac{-b\pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\ \frac{2\pm2i\sqrt{3}}{2}=\ 1\pm i\sqrt{3}\Rightarrow\ x\in\left\{1\pm i\sqrt{3}\right\}.$$

2. Observăm că $f(x)=x^2-3x+2=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\geq-\frac{1}{4}$ pentru $\forall x\in\mathbb{R}$ şi $f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{4}$, deci

$\min\limits_{x\in\mathbb{R}}f(x)=-\frac{1}{4}$.

3. Avem $\arcsin x+\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{}{2}\Leftrightarrow\ \arcsin x=\frac{}{2}-\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}=\ \frac{}{2}-\frac{}{4}=\frac{}{4}\Rightarrow$

$\Rightarrow x=\sin(\arcsin x)=\ \sin\frac{}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\in[-1,1]$.

4. Avem $C_7^0=C_7^7=1$, $C_7^1=C_7^6=7$, $C_7^2=C_7^5=\frac{6\cdot7}{2}=21$, $C_7^3=C_7^4=\frac{5\cdot6\cdot7}{1\cdot2\cdot3}=35$. Dintre numerele 1, 7, 21 şi 35, doar z este număr prim, fiind obţinut pentru $k=1$ sau $k=6$, deci $p=\frac{2}{8}=0,25$.

5. Pentru $a=-4$ obţinem $\vec{u}=-4\vec{i}+3\vec{j}$ şi $\vec{v}=4\vec{i}$, vectori care evident nu sunt coliniari.

Deci putem presupune că $a\neq-4$. Atunci vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sunt coliniari dacă $\frac{x_{\vec{u}}}{x_{\vec{v}}}=\frac{y_{\vec{u}}}{y_{\vec{v}}}\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{a}{4}=\frac{3}{a+4}\Rightarrow\ a(a+4)=12\Rightarrow\ a^2+4a-12=0$, cu soluţiile $a_1=-6$ şi $a_2=2$, deci $a\in\{-6,2\}\subset\mathbb{R}-\{-4\}$.

6. Avem $\overrightarrow{OA}=-3\vec{i}+4\vec{j}$, $\overrightarrow{OB}=4\vec{i}-3\vec{j}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{i}+2\vec{j}$, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\ 7\vec{i}-7\vec{j}$,
$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\ 4\vec{i}-2\vec{j}$, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\ -3\vec{i}+5\vec{j}$, $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\vec{i}+3\vec{j}$, deci
$\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\right)=\left(7\vec{i}-7\vec{j}\right)\cdot\left(\vec{i}+3\vec{j}\right)=\ 7\cdot1+(-7)\cdot3=\ -14$.

Varianta 19

1. Să se ordoneze crescător numerele $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[4]{8}$.

2. Să se determine funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ştiind că graficul său şi graficul funcţiei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=-3x+3$ sunt simetrice faţă de dreapta $x=1$.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{2x+1}-10\cdot3^{x+1}+27=0$.

4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă toate cifrele pare.

5. Să se determine ecuaţia medianei duse din vârful A al triunghiului ABC, unde $A(1,2)$, $B(2,3)$ şi $C(2,-5)$.

6. Să se arate că $\operatorname{ctg}2=\frac{\operatorname{ctg}1-\operatorname{tg}1}{2}$.

Rezolvări

1. Avem $\sqrt{3}=\sqrt[12]{3^6}=\sqrt[12]{729}$, $\sqrt[3]{5}=\sqrt[12]{5^4}=\sqrt[12]{625}$, $\sqrt[4]{8}=\sqrt[12]{8^3}=\sqrt[12]{512}$.

Din $512<625<729 \Rightarrow \sqrt[12]{512}<\sqrt[12]{625}<\sqrt[12]{729} \Rightarrow \sqrt[4]{8}<\sqrt[3]{5}<\sqrt{3}$.

2. Graficele funcţiilor f şi g sunt simetrice faţă de dreapta $x=1$ dacă şi numai dacă $f(1-x)=g(1+x)$, $\forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow f(x)=g(2-x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, deci $f(x)=g(2-x)=-3(2-x)+3=3x-3$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

3. $3^{2x+1}-10\cdot 3^{x+1}+27=0\,\big|:3 \Leftrightarrow 3^{2x}-10\cdot 3^{x}+9=0$. Cu notaţia $3^x=y$, $y>0$, ecuaţia devine $y^2-10y+9=0$, cu soluţiile $y_1=1$, respectiv $y_2=9$. Revenind la notaţia $3^x=y$, obţinem $3^{x_1}=y_1=1 \Rightarrow x_1=0$, respectiv $3^{x_2}=y_2=9 \Rightarrow x_2=2$. În concluzie, ecuaţia admite soluţiile $S=\{0,2\}$.

4. Fie $M=\{100,101,\cdots,999\}$ mulţimea numerelor naturale de trei cifre.
Evident $|M|=999-99=900$. Notăm cu $A=\{0,2,4,6,8\}$ mulţimea cifrelor pare şi $M'=\left\{\overline{abc}\in M \,\middle|\, a,b,c \text{ cifre pare}\right\}$. Evident $|A|=5$ şi $\overline{abc}\in M' \Leftrightarrow (a,b,c)\in\left(A-\{0\}\right)\times A\times A$, deci $|M'|=\left|\left(A-\{0\}\right)\times A\times A\right|=4\cdot 5\cdot 5=100$. Atunci $p=\dfrac{|M'|}{|M|}=\dfrac{100}{900}=\dfrac{1}{9}$.

5. Fie M mijlocul segmentului BC. Avem $x_M=\dfrac{x_B+x_C}{2}=\dfrac{2+2}{2}=2$ şi $y_M=\dfrac{y_B+y_C}{2}=$ $=\dfrac{3+(-5)}{2}=-1$. Ecuaţia medianei duse din vârful A al triunghiului ABC este ecuaţia dreptei determinate de punctele $A(1,2)$ şi $M(2,-1)$, adică $(AM):\ \dfrac{y-y_A}{y_M-y_A}=\dfrac{x-x_A}{x_M-x_A} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \dfrac{y-2}{-1-2}=\dfrac{x-1}{2-1} \Leftrightarrow \dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{x-1}{1} \Leftrightarrow 3x+y-5=0$.

6. Avem $\mathrm{ctg}2=\dfrac{\mathrm{ctg}^2 1-1}{2\mathrm{ctg}1}=\dfrac{\mathrm{ctg}1-\dfrac{1}{\mathrm{ctg}1}}{2}=\dfrac{\mathrm{ctg}1-\mathrm{tg}1}{2}$.

Varianta 20

1. Să se arate că $2\in\left(\log_3 4,\sqrt{5}\right)$.

2. Să se rezolve în mulţimea numerelor complexe ecuaţia $x^2-2x+2=0$.

3. Să se rezolve în $[0,2\ \ )$ ecuaţia $\sin x+\cos x=-1$.

4. Să se calculeze $C_4^4+C_5^4+C_6^4$.

5. Pe laturile AB şi AC ale triunghiului ABC se consideră punctele M, respectiv N, astfel încât $\overrightarrow{AM}=4\overrightarrow{MB}$ şi $MN\parallel BC$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$, astfel încât $\overrightarrow{CN}=m\overrightarrow{AC}$.

6. Să se calculeze perimetrul triunghiului OAB, ştiind că $O(0,0)$, $A(-1,2)$ şi $B(-2,3)$.

Rezolvări

1. Avem $\log_3 4 < \log_3 9 = 2$ şi $2 = \sqrt{4} < \sqrt{5}$, deci $\log_3 4 < 2 < \sqrt{5} \Leftrightarrow 2 \in \left(\log_3 4, \sqrt{5}\right)$.

2. Avem $a = 1$, $b = -2$, $c = 2$, $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4 < 0$, deci

$$x_{1,\,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i.$$

3. Avem $\sin x + \cos x = \sin x + \sin\left(\frac{}{2} - x\right) = 2\sin\frac{x + \frac{}{2} - x}{2}\cos\frac{x - \left(\frac{}{2} - x\right)}{2} =$

$= \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{}{4}\right)$, deci $\sin x + \cos x = -1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - \frac{}{4} = \pm \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2k \Leftrightarrow x = \frac{}{4} \pm \frac{3}{4} + 2k$, unde $k \in \mathbb{Z}$.

Deci $x \in \left\{\frac{}{4} \pm \frac{3}{4} + 2k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cap [0, 2\ ) = \left\{\frac{}{4} + \frac{3}{4}, \frac{}{4} - \frac{3}{4} + 2\right\} = \left\{\ , \frac{3}{2}\right\}$.

4. Avem $C_4^4 = \frac{4!}{4! \cdot (4-4)!} = \frac{4!}{4! \cdot 0!} = 1$, $C_5^4 = \frac{5!}{4! \cdot (5-4)!} = \frac{5!}{4! \cdot 1!} = 5$, $C_6^4 = \frac{6!}{4! \cdot (6-4)!} =$

$= \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15$, deci $C_4^4 + C_5^4 + C_6^4 = 1 + 5 + 15 = 21$.

5. Din $\overrightarrow{AM} = 4\overrightarrow{MB}$ şi $MN \parallel BC$ obţinem, conform teoremei lui Thales, că avem şi

$\overrightarrow{AN} = 4\overrightarrow{NC} \Rightarrow -\overrightarrow{AN} = -4\overrightarrow{NC} \Rightarrow \overrightarrow{NA} = 4\overrightarrow{CN} \Rightarrow \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{NA} = 5\overrightarrow{CN} \Rightarrow 5\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overrightarrow{CN} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$, deci m din relaţia $\overrightarrow{CN} = m\overrightarrow{AC}$ are valoarea $m = -\frac{1}{5}$.

6. Avem $OA = \sqrt{(-1-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{5}$, $OB = \sqrt{(-2-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{13}$ şi

$AB = \sqrt{\left[-1-(-2)\right]^2 + (2-3)^2} = \sqrt{2}$, deci perimetrul triunghiului OAB este

$OA + OB + AB = \sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{13}$.

Varianta 21

1. Să se rezolve în mulţimea numerelor complexe ecuaţia $x^2 - 8x + 25 = 0$.

2. Să se determine $a \in \mathbb{R}$, pentru care graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (a+1)x^2 + 3(a-1)x + a - 1$, intersectează axa Ox în două puncte distincte.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x-1}} = 1$.

4. Să se calculeze $C_8^4 - C_7^4 - C_7^3$.

5. Să se determine ecuaţia perpendicularei duse din punctul $A(1,2)$ pe dreapta $d:\ x+y-1=0$.

6. Ştiind că $\sin x=\dfrac{1}{3}$, să se calculeze $\cos 2x$.

Rezolvări

1. Avem $a=1$, $b=-8$, $c=25$, $\Delta=b^2-4ac=(-8)^2-4\cdot 1\cdot 25=-36<0$, $x_{1,\,2}=\dfrac{-b\pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}=$ $=\dfrac{8\pm 6i}{2}=4\pm 3i$.

2. Graficul funcţiei f intersectează axa Ox în două puncte distincte dacă şi numai dacă $a+1\neq 0$ şi $\Delta>0$, unde $\Delta=\left[3(a-1)\right]^2-4(a+1)(a-1)=(a-1)(5a-13)$, deci $a\neq -1$ şi $a\in(-\infty,1)\cup\left(\dfrac{13}{5},\infty\right)$. În concluzie, $a\in(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup\left(\dfrac{13}{5},\infty\right)$.

3. Se impune condiţia $x-1\geq 0\Leftrightarrow x\in[1,\infty)$. Avem $\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1-6\sqrt{x-1}+9}=$ $=\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-3\right)^2}=\left|\sqrt{x-1}-3\right|$, deci $\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1\Leftrightarrow\left|\sqrt{x-1}-3\right|=1\Leftrightarrow\sqrt{x-1}-3=\pm 1\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\sqrt{x-1}=3\pm 1$, adică $\sqrt{x-1}=3-1=2\Rightarrow x-1=2^2=4\Rightarrow x=5$, respectiv $\sqrt{x-1}=3+1=4\Rightarrow$ $\Rightarrow x-1=4^2=16\Rightarrow x=17$.
Deci ecuaţia admite soluţiile $S=\{5,17\}\subset[1,\infty)$.

4. Conform formulei de recurenţă pentru combinări, avem $C_8^4=C_7^4+C_7^3\Leftrightarrow C_8^4-C_7^4-C_7^3=0$.

5. Avem $x+y-1=0\Leftrightarrow y=-x+1\Rightarrow m=-1$, unde $m=\text{panta}(d)$. Fie d' perpendiculara dusă prin $A(1,2)$ la dreapta d. Din $d'\perp d$ deducem că $m'=-\dfrac{1}{m}=1$, unde $m'=\text{panta}(d')$. Avem $A(1,2)\in d'\Leftrightarrow y-y_A=m'(x-x_A)\Leftrightarrow y-2=1\cdot(x-1)\Leftrightarrow x-y+1=0$.

6. Avem $\cos 2x=1-2\sin^2 x=1-2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{7}{9}$.

Varianta 22

1. Să se calculeze $1+i+i^2+\cdots+i^{10}$.

2. Se consideră funcţiile $f,\ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$, $g(x)=2x-1$. Să se rezolve ecuaţia $(f\circ g)(x)=0$.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\lg(x+9)+\lg(7x+3)=$ $=1+\lg\left(x^2+9\right)$.

4. Să se rezolve inecuaţia $C_n^2<10$, $n\geq 2$, n natural.

5. Se consideră dreptele paralele de ecuaţii $d_1 :\ x-2y=0$ şi $d_2 :\ 2x-4y-1=0$. Să se calculeze distanţa dintre cele două drepte.

6. Să se calculeze $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$.

Rezolvări

1. Avem $1+i+i^2+\cdots+i^{10} = \dfrac{1-i^{11}}{1-i} = \dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{(1+i)^2}{1^2+(-1)^2} = \dfrac{2i}{2} = i$.

2. Observăm că $f(x) = x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci $(f \circ g)(x) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(g(x)) = (g(x)-1)(g(x)-2) = (2x-1-1)(2x-1-2) = (2x-2)(2x-3) = 0$, cu soluţiile $x_1 = 1$ şi $x_2 = \dfrac{3}{2}$. În concluzie, ecuaţia admite soluţiile $S = \left\{1, \dfrac{3}{2}\right\}$.

3. Se impun condiţiile $x+9>0 \Leftrightarrow x \in (-9,\infty)$ şi $7x+3>0 \Leftrightarrow x \in \left(-\dfrac{3}{7},\infty\right)$, deci $x \in (-9,\infty) \cap \left(-\dfrac{3}{7},\infty\right) = \left(-\dfrac{3}{7},\infty\right)$. Avem $\lg(x+9)+\lg(7x+3) = 1+\lg\left(x^2+9\right) \Rightarrow$ $\lg(x+9)(7x+3) = \lg 10\left(x^2+9\right) \Rightarrow (x+9)(7x+3) = 10\left(x^2+9\right) \Rightarrow x^2-22x+9=0$, cu soluţiile $x_{1,\,2} = 11 \pm 4\sqrt{7} \in \left(-\dfrac{3}{7},+\infty\right)$, deci $x \in \left\{11-4\sqrt{7}, 11+4\sqrt{7}\right\}$.

4. Avem $C_n^2 = \dfrac{n!}{2!\cdot(n-2)!} = \dfrac{(n-1)n}{2}$, deci $C_n^2 < 10 \Rightarrow \dfrac{(n-1)n}{2} < 10 \Rightarrow n^2-n-20<0$, cu soluţia $n \in (-4,5)$. Deci $n \in \mathbb{N} \cap [2,\infty) \cap (-4,5) = \{2,3,4\}$.

5. Observăm că $O(0,0) \in d_1$, deoarece $0-2\cdot 0=0$. Atunci $\operatorname{dist}(d_1,d_2) = \operatorname{dist}(O,d_2) =$ $= \dfrac{|2\cdot 0-4\cdot 0-1|}{\sqrt{2^2+(-4)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{20}} = \dfrac{\sqrt{5}}{10}$.

6. $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ = 2\sin\dfrac{75^\circ+15^\circ}{2}\cos\dfrac{75^\circ-15^\circ}{2} = 2\sin 45^\circ \cos 30^\circ = 2\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Varianta 23

1. Să se calculeze suma primilor 20 de termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_4-a_2=4$ şi $a_1+a_3+a_5+a_6=30$.

2. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\dfrac{2x+3}{x+2} = \dfrac{x-1}{x-2}$.

3. Să se calculeze $\operatorname{tg}\left(\dfrac{}{2} - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}\right)$.

4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un element n din mulţimea $\{1,2,3,\cdots,40\}$, numărul $2^{n+2}\cdot 6^{n}$ să fie pătrat perfect.

5. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al triunghiului ABC, dacă $A(5,-3)$, $B(2,-1)$, $C(0,9)$.

6. Ştiind că $\operatorname{tg} \quad = 2$, să se calculeze $\sin 4 \quad$.

Rezolvări

1. Folosind formula termenului general $a_n = a_1 + (n-1)r$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, obţinem $a_4 - a_2 = 4 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2r = 4 \Rightarrow r = 2$ şi $a_1 + a_3 + a_5 + a_6 = 30 \Rightarrow a_1 + a_1 + 2r + a_1 + 4r + a_1 + 5r = 30 \Rightarrow$ $\Rightarrow 4a_1 + 11r = 30 \Rightarrow 4a_1 = 30 - 11r = 30 - 11\cdot 2 = 8 \Rightarrow a_1 = \dfrac{8}{4} = 2$, deci $a_n = a_1 + (n-1)\cdot r =$ $= 2 + (n-1)\cdot 2 = 2n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $S_{20} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{20} = \dfrac{(a_1 + a_{20})\cdot 20}{2} = (2+40)\cdot 10 = 420.$

2. Se impun condiţiile $x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$ şi $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$, deci $x \in \mathbb{R} - \{-2,2\}$. Avem $\dfrac{2x+3}{x+2} = \dfrac{x-1}{x-2} \Rightarrow (2x+3)(x-2) = (x+2)(x-1) \Rightarrow 2x^2 - x - 6 = x^2 + x - 2 \Rightarrow x^2 - 2x - 4 = 0,$ cu soluţiile $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{5} \in \mathbb{R} - \{-2,2\}$.

3. Avem $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\ }{2} - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}\right)} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.

4. Fie $M = \{1,2,\cdots,39,40\}$ şi $m = 2^{n+2}\cdot 6^{n} = 2^{2n+2}\cdot 3^{n} = \left(2^{n+1}\right)^2 \cdot 3^{n}$. Observăm că numărul m este pătrat perfect dacă şi numai dacă exponentul n al lui 3 este număr par, adică $n \in M' = \{2,4,\cdots,40\}$, deci $p = \dfrac{|M'|}{|M|} = \dfrac{20}{40} = 0,5$.

5. Fie $G(x_G, y_G)$ centrul de greutate al triunghiului ABC. Avem $x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} =$ $= \dfrac{5+2+0}{3} = \dfrac{7}{3}$ şi $y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = \dfrac{-3+(-1)+9}{3} = \dfrac{5}{3}$, deci coordonatele lui G sunt $(x_G, y_G) = \left(\dfrac{7}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$.

6. Avem $\operatorname{tg}2 \quad = \dfrac{2\operatorname{tg} \quad}{1 - \operatorname{tg}^2 \quad} = \dfrac{2\cdot 2}{1-2^2} = -\dfrac{4}{3}$, de unde obţinem

$$\sin 4 \quad = \frac{2\operatorname{tg}2 \quad}{1 + \operatorname{tg}^2 2 \quad} = \frac{2\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)}{1 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{-\frac{8}{3}}{1 + \frac{16}{9}} = -\frac{8}{3}\cdot\frac{9}{25} = -\frac{24}{25}.$$

Varianta 24

1. Să se calculeze $z+\frac{1}{z}$, pentru $z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

2. Să se determine funcţia de gradul al doilea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pentru care $f(-1)=f(1)=0$, $f(2)=6$.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2 x+\log_4 x+\log_8 x=\frac{11}{6}$.

4. Să se demonstreze că, dacă $x\in\mathbb{R}$ şi $|x|\geq 1$, atunci $(1+x)^2+(1-x)^2\geq 4$.

5. Să se determine ecuaţia înălţimii duse din B în triunghiul ABC, ştiind că $A(0,9)$, $B(2,-1)$ şi $C(5,-3)$.

6. Să se calculeze $\left(2\vec{i}+5\vec{j}\right)\cdot\left(3\vec{i}-4\vec{j}\right)$.

Rezolvări

1. Observăm că $|z|^2=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1$, deci $\frac{1}{z}=\overline{z}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$, deci $z+\frac{1}{z}=$

$=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}+\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=-1$.

2. Fie $f(x)=ax^2+bx+c$, unde $a\in\mathbb{R}^*$ şi $b,c\in\mathbb{R}$. Avem $f(-1)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+c=a-b+c=0$, $f(1)=0\Leftrightarrow a\cdot 1^2+b\cdot 1+c=a+b+c=0$ şi

$f(2)=6\Leftrightarrow a\cdot 2^2+b\cdot 2+c=4a+2b+c=6$. Am obţinut astfel sistemul de ecuaţii

$\begin{cases}a-b+c=0\\ a+b+c=0\\ 4a+2b+c=6\end{cases}$. Scăzând primele două ecuaţii obţinem $b=0\Rightarrow a+c=0\Rightarrow c=-a$. Înlocuind în ecuaţia $4a+2b+c=6$, obţinem $4a+2\cdot 0-a=3a=6\Rightarrow a=2$. Deci $a=2$, $b=0$, $c=-2\Rightarrow$ $\Rightarrow f(x)=2x^2-2$. Sau, pornind de la ipoteza că $f(-1)=f(1)=0$, putem deduce direct că funcţia f este de forma $f(x)=a(x+1)(x-1)=a\left(x^2-1\right)$, iar $a=2$ îl obţinem din condiţia ca $f(2)=6$.

3. Se impune condiţia $x>0$, deci $x\in(0,\infty)$. Observăm că $\log_4 x=\frac{\lg x}{\lg 4}=\frac{\lg x}{2\lg 2}=\frac{1}{2}\log_2 x$,

respectiv că $\log_8 x=\frac{\lg x}{\lg 8}=\frac{\lg x}{3\lg 2}=\frac{1}{3}\log_2 x$, deci $\log_2 x+\log_4 x+\log_8 x=$

$=\log_2 x+\frac{1}{2}\log_2 x+\frac{1}{3}\log_2 x=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\cdot\log_2 x=\frac{11}{6}\log_2 x$, deci ecuaţia dată devine

$\frac{11}{6}\log_2 x=\frac{11}{6}\Leftrightarrow \log_2 x=1\Leftrightarrow x=2\in(0,\infty)$.

4. Avem $(1+x)^2+(1-x)^2 = 2\left(1+x^2\right) \geq 2\cdot 2\sqrt{1\cdot x^2} = 4|x| \geq 4$.

5. Avem $\text{panta}(AC)=\dfrac{y_C-y_A}{x_C-x_A}= \dfrac{-3-9}{5-0}=-\dfrac{12}{5}$. Notăm cu BB_1 înălţimea din B. Avem $BB_1 \perp AC \Rightarrow m'=-\dfrac{1}{m}=\dfrac{5}{12}$, unde $m=\text{panta}(AC)$ şi $m'=\text{panta}(BB_1)$. Din $B(2,-1)\in BB_1 \Rightarrow y-y_B=m'(x-x_B) \Rightarrow y-(-1)=\dfrac{5}{12}(x-2) \Rightarrow 5x-12y-22=0$, deci $(BB_1):\ 5x-12y-22=0$.

6. Avem $\left(2\vec{i}+5\vec{j}\right)\cdot\left(3\vec{i}-4\vec{j}\right)=\left[2\cdot 3+5\cdot(-4)\right]= -14$.

Varianta 25

1. Să se calculeze $(1-i)(1+2i)-3(2-i)$.

2. Să se arate că, pentru orice $a\in\mathbb{R}^*$, dreapta $y=x+4$ intersectează parabola $y=ax^2+(a-2)x+1$.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{2x}-3\cdot 2^{x+1}+8=0$.

4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $\{10,11,12,\cdots,40\}$, suma cifrelor lui să fie divizibilă cu 3.

5. În triunghi ABC, punctele M, N, P sunt mijloacele laturilor. Fie H ortocentrul triunghiului MNP. Să se demonstreze că $AH=BH=CH$.

6. Să se calculeze $\sin\left(\frac{}{6}+\frac{}{4}\right)+\sin\left(\frac{}{6}-\frac{}{4}\right)$.

Rezolvări

1. Avem $(1-i)(1+2i)-3(2-i)= (3+i)-(6-3i)= -3+4i$.

2. Dreapta intersectează parabola dacă şi numai dacă sistemul format din ecuaţiile lor, respectiv $\begin{cases} y=x+4 \\ y=ax^2+(a-2)x+1 \end{cases}$, admite cel puţin o soluţie reală. Din sistem obţinem ecuaţia $ax^2+(a-2)x+1=x+4 \Leftrightarrow ax^2+(a-3)x-3=0$, cu $\Delta=(a-3)^2-4\cdot a\cdot(-3)= (a+3)^2\geq 0$, deci ecuaţia, precum şi sistemul, admit cel puţin o soluţie reală.

3. Făcând notaţia $2^x=y$, $y>0$, ecuaţia devine $y^2-6y+8=0$, cu soluţiile $y_{1,2}=3\pm 1$, deci $y_1=3-1=2$, respectiv $y_2=3+1=4$. Revenind la notaţia $2^x=y$, obţinem $2^{x_1}=y_1=2 \Rightarrow$ $\Rightarrow x_1=1$, respectiv $2^{x_2}=y_2=4\Rightarrow x_2=2$, deci $x\in\{1,2\}$.

4. Fie $M=\{10,11,12,\cdots,40\}$. Evident $|M|=40-9=31$. Fie $M'=\{12,15,18,\cdots,36,39\}$ submulţimea lui M formată din multiplii de 3. Observăm că $12=3\cdot4$, $15=3\cdot5$, ... , $39=3\cdot13$, deci $|M'|=13-3=10$. Atunci $p=\frac{|M'|}{|M|}=\frac{10}{31}$.

5. Avem $MP\parallel BC$, $MN\parallel AC$ şi $NP\parallel AB$. Atunci, din $NH\perp MP$ deducem că $NH\perp BC$ şi, ţinând cont că N este mijlocul laturii BC, rezultă că NH este mediatoarea lui BC. Similar deducem că MH este mediatoarea lui AB şi PH este mediatoarea lui AC, deci H este centrul cercului circumscris triunghiului ABC, de unde obţinem că $AH=BH=CH=R$, unde R este raza acestui cerc.

6. Ţinând cont de faptul că $\sin(a+b)+\sin(a-b)=2\sin a\cos b$, pentru $\forall a,b\in\mathbb{R}$, obţinem că

$$\sin\left(\frac{}{6}+\frac{}{4}\right)+\sin\left(\frac{}{6}-\frac{}{4}\right)=2\sin\frac{}{6}\cos\frac{}{4}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Varianta 26

1. Fie z_1 şi z_2 soluţiile complexe ale ecuaţiei $2z^2+z+50=0$. Să se calculeze $|z_1|+|z_2|$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-2x$. Să se arate că funcţia $f\circ f\circ f$ este strict descrescătoare.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^x+9^x=2$.

4. Fie mulţimea $A=\{-2,-1,0,1,2\}$ şi o funcţie bijectivă $f:A\to A$. Să se calculeze $f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)$.

5. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(-1,3)$ şi $B(1,-1)$. Să se determine ecuaţia mediatoarei segmentului AB.

6. Fie $\in\left(\frac{}{2},\ \right)$ cu $\sin\ =\frac{1}{3}$. Să se calculeze $\mathrm{tg}\ $.

Rezolvări

1. Avem $z_2=\overline{z_1}\Rightarrow |z_2|=|\overline{z_1}|=|z_1|$. Din $P=z_1z_2=\frac{c}{a}=\frac{50}{2}=25$, deducem că $|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|=|z_1|^2=25\Rightarrow |z_1|=|z_2|=\sqrt{25}=5\Rightarrow |z_1|+|z_2|=5+5=10$.

2. Observăm că $f(f(x))=1-2f(x)=1-2(1-2x)=4x-1$, $\forall x\in R$, deci $(f\circ f\circ f)(x)=$ $=(f\circ f)(f(x))=4f(x)-1=4(1-2x)-1=-8x+3$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Evident că, pentru $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}$, $x_1<x_2\Rightarrow -8x_1+3>-8x_2+3$, deci funcţia $f\circ f\circ f$ este strict descrescătoare.

3. Cu notaţia $3^x=y$, $y>0$, ecuaţia devine $y^2+y-2=0$, cu soluţiile $y_{1,2}=\frac{-1\pm3}{2}$, deci $y_1=\frac{-1-3}{2}=-2\notin(0,\infty)$, respectiv $y_2=\frac{-1+3}{2}=1\in(0,\infty)$. Revenind la notaţia $3^x=y$, obţinem $3^x=1\Rightarrow x=0$.

4. Funcţia f este injectivă, adică $f(x)\neq f(y)$ pentru $\forall x\neq y$, şi surjectivă, adică $\operatorname{Im} f=A$, deci $\{f(-2),f(-1),f(0),f(1),f(2)\}=\{-2,-1,0,1,2\}$ şi, folosind comutativitatea adunării, obţinem $f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)=(-2)+(-1)+0+1+2=0$.

5. Avem $m=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{-1-3}{1-(-1)}=-2$, unde $m=\text{panta}(AB)$. Fie $M(x_M,y_M)$ mijlocul segmentului AB, deci $x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{-1+1}{2}=0$, respectiv $y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{3+(-1)}{2}=1$, deci $(x_M,y_M)=(0,1)$. Fie d mediatoarea segmentului AB $\Leftrightarrow$ $d\perp AB$ şi $M\in d$. Din $d\perp AB\Rightarrow m'=-\dfrac{1}{m}=\dfrac{1}{2}$, unde $m'=\text{panta}(d)$. Din $M(0,1)\in d\Leftrightarrow y-y_M=m'(x-x_M)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y-1=\dfrac{1}{2}(x-0)\Leftrightarrow x-2y+2=0$, deci ecuaţia mediatoarei segmentului AB este $(d):\ x-2y+2=0$.

6. Avem $\ \in\left(\dfrac{\ }{2},\ \ \right)\Rightarrow \cos\ \ <0\Rightarrow \cos\ \ =-\sqrt{1-\sin^2\ \ }=-\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, deci

$$\operatorname{tg}\ \ =\frac{\sin\ }{\cos\ }=\frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Varianta 27

1. Să se calculeze modulul numărului complex $z=1+i+i^2+i^3+\dots+i^6$.

2. Să se determine valoarea maximă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2x^2+x$.

3. Să se rezolve în intervalul $(0,\infty)$ ecuaţia $\lg^2 x+5\lg x-6=0$.

4. Să se determine numărul funcţiilor $f:\{0,1,2,3\}\to\{0,1,2,3\}$ care au proprietatea $f(0)=f(1)=2$.

5. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $O(0,0)$, $A(1,2)$ şi $B(3,1)$. Să se determine măsura unghiului AOB.

6. Ştiind că $\ \in\mathbb{R}$ şi că $\sin\ \ +\cos\ \ =\dfrac{1}{3}$, să se calculeze $\sin 2\ \ $.

Rezolvări

1. Avem $z=1+i+i^2+\dots+i^6=\dfrac{1-i^7}{1-i}=\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2}{1-i^2}=\dfrac{2i}{2}=i\Rightarrow |z|=|i|=1$.

2. Avem $a=-2<0$, $b=1$, $c=0$, $\Delta=b^2-4ac=1^2-4\cdot(-2)\cdot 0=1$, deci $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=y_V=$ $=-\dfrac{\Delta}{4a}=-\dfrac{1}{4\cdot(-2)}=\dfrac{1}{8}$.

3. Cu notaţia $\lg x = y$, ecuaţia devine $y^2 + 5y - 6 = 0$, cu soluţiile $y_{1,2} = \frac{-5 \pm 7}{2}$, adică $y_1 = \frac{-5-7}{2} = -6$, respectiv $y_2 = \frac{-5+7}{2} = 1$. Revenind la notaţia $\lg x = y$, obţinem $\lg x_1 = y_1 = -6 \Rightarrow x_1 = 10^{-6} = \frac{1}{10^6}$, respectiv $\lg x_2 = y_2 = 1 \Rightarrow x_2 = 10$, deci $x \in \left\{\frac{1}{10^6}, 10\right\}$.

4. Observăm că $f(2)$ şi $f(3) \in \{0,1,2,3\}$ pot fi alese fiecare în 4 moduri posibile, deci avem $4 \cdot 4 = 16$ funcţii posibile.

5. Avem $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + 2\vec{j}$, $\overrightarrow{OB} = 3\vec{i} + \vec{j}$, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 5$, $\left|\overrightarrow{OA}\right| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, $\left|\overrightarrow{OB}\right| = \sqrt{3^2 + 1} = \sqrt{10}$, $\cos \quad = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{\left|\overrightarrow{OA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OB}\right|} = \frac{5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \quad = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{}{4}$, unde am notat cu măsura în radiani a unghiului AOB şi am ţinut cont că $\in \left(0, \frac{}{2}\right)$, deoarece A şi B sunt situate în acelaşi cadran (respectiv în cadranul I).

6. Avem $\sin \quad + \cos \quad = \frac{1}{3} \Rightarrow (\sin \quad + \cos \quad)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow \sin^2 \quad + \cos^2 \quad + 2\sin \quad \cos \quad = \frac{1}{9} \Rightarrow$ $\Rightarrow 1 + \sin 2 \quad = \frac{1}{9} \Rightarrow \sin 2 \quad = \frac{1}{9} - 1 = -\frac{8}{9}$.

Varianta 28

1. Să se calculeze $(1+i)^{10} + (1-i)^{10}$.

2. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 6x - 3x^2$. Să se ordoneze crescător numerele $f\left(\sqrt{2}\right)$, $f\left(\sqrt{3}\right)$ şi $f(2)$.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{2x-1} = 3$.

4. Să se determine numărul funcţiilor $f : \{0,1,2,3\} \to \{0,1,2,3\}$ care au proprietatea că $f(0)$ este impar.

5. Fie triunghiul ABC şi $M \in (BC)$ astfel încât $\frac{BM}{BC} = \frac{1}{3}$. Să se demonstreze că $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

6. Ştiind că $\in \left(\frac{}{2}, \quad\right)$ şi că $\sin \quad = \frac{3}{5}$, să se calculeze $\mathrm{tg} \quad$.

Rezolvări

1. Avem $(1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 2i$, deci $(1+i)^{10} = \left[(1+i)^2\right]^5 = (2i)^5 = 32i$, respectiv $(1-i)^{10} = \overline{(1+i)^{10}} = -32i$, de unde deducem că $(1+i)^{10} + (1-i)^{10} = 32i - 32i = 0$.

2. Avem $a = -3 < 0$ şi $x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2\cdot(-3)} = 1$, deci funcţia f este strict descrescătoare pe intervalul $[1,\infty)$. În concluzie, din $2 > \sqrt{3} > \sqrt{2} > 1 \Rightarrow f(2) < f(\sqrt{3}) < f(\sqrt{2})$.

3. Se impune condiţia $2x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{2},\infty\right)$. Avem $\sqrt{2x-1} = 3 \Leftrightarrow 2x-1 = 3^2 = 9 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = 5 \in \left[\frac{1}{2},\infty\right)$, deci ecuaţia admite soluţia $x = 5$.

4. Observăm că $f(1)$, $f(2)$ şi $f(3) \in \{0,1,2,3\}$ pot fi alese fiecare în 4 moduri posibile, iar $f(0)$ este impar dacă şi numai dacă $f(0) \in \{1,3\}$, adică valoarea lui $f(0)$ poate fi aleasă în 2 moduri, de unde deducem că sunt $2\cdot 4\cdot 4\cdot 4 = 128$ funcţii posibile.

5. Avem $M \in (BC)$ şi $\frac{BM}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow BM = \frac{1}{3}BC$, mai mult, $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

Atunci $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

6. Avem $\in \left(\frac{}{2},\ \right) \Rightarrow \cos \ < 0 \Rightarrow \cos \ = -\sqrt{1-\sin^2} = -\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5}$, deci

$$\operatorname{tg} = \frac{\sin}{\cos} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}.$$

Varianta 29

1. Să se demonstreze că numărul $\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-2\sqrt{3}}$ este număr natural.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$. Să se rezolve inecuaţia $f(2x) \leq 0$.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x = \sqrt{2-x}$.

4. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând o mulţimea din mulţimea submulţimilor nevide ale mulţimii $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, aceasta să aibă toate elementele impare.

5. Fie punctele $A(2,0)$, $B(1,1)$ şi $C(3,-2)$. Să se calculeze $\sin C$.

6. Ştiind că $\in \left(0,\frac{}{2}\right)$ şi că $\operatorname{tg} \ + \operatorname{ctg} \ = 2$, să se calculeze $\sin 2$.

Rezolvări

1. Avem $7+4\sqrt{3}=\ 4+4\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2=\ \left(2+\sqrt{3}\right)^2$, deci $\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\ \sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}=\ \left|2+\sqrt{3}\right|=$ $=2+\sqrt{3}$, respectiv $7-4\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}\right)^2-2\cdot 2\cdot\sqrt{3}+2^2=\left(2-\sqrt{3}\right)^2$, deci $\sqrt{7-2\sqrt{3}}=\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}=$ $=\left|2-\sqrt{3}\right|=\ 2-\sqrt{3}$.

În concluzie, $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\ 2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}=\ 4\in\mathbb{N}$.

2. Avem $f\left(2x\right)=2\left(2x\right)^2-5\cdot 2x+2=8x^2-10x+2=\ 2\left(4x^2-5x+1\right)=\ 2\left(4x-1\right)\left(x-1\right)=$ $=8\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-1\right)$, deci $f\left(2x\right)\le 0\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-1\right)\le 0\Leftrightarrow\ x\in\left[\frac{1}{4},1\right]$.

3. Se impun condiţiile $x\ge 0\Leftrightarrow\ x\in\left[0,+\infty\right)$ şi $2-x\ge 0\Leftrightarrow\ x\in\left(-\infty,2\right]$, deci $x\in\left[0,\infty\right)\bigcap\left(-\infty,2\right]=$ $=\left[0,2\right]$. Avem $x=\sqrt{2-x}\Rightarrow\ x^2=2-x\Rightarrow\ x^2+x-2=0$, cu soluţiile $x_1=-2\notin\left[0,2\right]$, respectiv $x_2=1\in\left[0,2\right]$, deci ecuaţia admite soluţia $x=1$.

4. Observăm că $\left|A\right|=6$ admite $2^6=64$ submulţimi, dintre care $64-1=63$ sunt nevide. Fie $A'=\left\{1,3,5\right\}$ submulţimea numerelor impare. Avem $\left|A'\right|=3$ şi A' admite $2^3=8$ submulţimi, dintre care $8-1=7$ sunt nevide. Deci $p=\frac{7}{63}=\frac{1}{9}$.

5. Avem $AB=\sqrt{\left(2-1\right)^2+\left(0-1\right)^2}=\sqrt{2}$, $BC=\sqrt{\left(1-3\right)^2+\left[1-\left(-2\right)\right]^2}=\sqrt{13}$, $AC=\sqrt{\left(2-3\right)^2+\left[0-\left(-2\right)\right]^2}=\sqrt{5}$. Conform teoremei cosinusului, avem

$$\cos C=\frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2AC\cdot BC}=\frac{5+13-2}{2\sqrt{5}\cdot\sqrt{13}}=\frac{8}{\sqrt{65}}>0\Rightarrow\ C\in\left(0,\frac{\ }{2}\right)$$ şi atunci

$$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\left(\frac{8}{\sqrt{65}}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{65}}=\frac{\sqrt{65}}{65}.$$

6. Avem $\operatorname{tg}\quad+\operatorname{ctg}\quad=\frac{\sin}{\cos}+\frac{\cos}{\sin}=\frac{\sin^2\quad+\cos^2}{\sin\quad\cos}=\frac{1}{\sin\quad\cos}$, deci $\operatorname{tg}\quad+\operatorname{ctg}\quad=2\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\frac{1}{\sin\quad\cos}=2\Leftrightarrow\ 2\sin\quad\cos\quad=1\Leftrightarrow\ \sin 2\quad=1$.

Varianta 30

1. Să se demonstreze că numărul $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$ este natural.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=x^2-mx+2$. Să se determine mulţimea valorilor parametrului real m pentru care graficul funcţiei f intersectează axa Ox în două puncte distincte.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(x+1)+\log_3(x+3)=1$.

4. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând o mulţime din mulţimea submulţimilor nevide ale mulţimii $A=\{1,2,3,4,5\}$, aceasta să aibă produsul elementelor 120.

5. Se consideră punctele $A(0,2)$, $B(1,-1)$ şi $C(3,4)$. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al triunghiului ABC.

6. Să se demonstreze că $\sin\frac{}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Rezolvări

1. Observăm că $\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\frac{-\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}{-\left(\sqrt{k}\right)^2+\left(\sqrt{k+1}\right)^2}=\frac{-\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}{-k+k+1}=-\sqrt{k}+\sqrt{k+1}$, pentru $\forall k\in\mathbb{N}$, deci $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}=$
$=-\sqrt{1}+\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\dots-\sqrt{99}+\sqrt{100}=-\sqrt{1}+\sqrt{100}=-1+10=9\in\mathbb{N}$.

2. Graficul funcţiei f intersectează axa Ox în două puncte distincte dacă şi numai dacă $\Delta=m^2-8>0\Leftrightarrow\ m\in\left(-\infty,-2\sqrt{2}\right)\cup\left(2\sqrt{2},\infty\right)$.

3. Se impun condiţiile $x+1\geq 0\Leftrightarrow x\in[-1,\infty)$ şi $x+3\geq 0\Leftrightarrow x\in[-3,\infty)$, deci $x\in[-1,\infty)\cap[-3,\infty)=[-1,\infty)$. Avem $\log_3(x+1)+\log_3(x+3)=1\Rightarrow$
$\Rightarrow\log_3(x+1)(x+3)=1\Rightarrow(x+1)(x+3)=3\Rightarrow x^2+4x=0$, cu soluţiile $x_1=-4\notin[-1,\infty)$, respectiv $x_2=0\in[-1,\infty)$, deci ecuaţia admite soluţia $x=0$.

4. Avem $|A|=5$, deci A admite $2^5=32$ submulţimi, dintre care $32-1=31$ sunt nevide. Se observă că $120=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=2\cdot 3\cdot 4\cdot 5$, deci există doar două submulţimi ale lui A, respectiv $\{1,2,3,4,5\}$ şi $\{2,3,4,5\}$, care au produsul elementelor egal cu 120. În concluzie, $p=\frac{2}{31}$.

5. Fie $G(x_G,y_G)$ centrul de greutate al triunghiului ABC. Avem $x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}=$
$\frac{0+1+3}{3}=\frac{4}{3}$ şi $y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}=\frac{2+(-1)+4}{3}=\frac{5}{3}$, deci $(x_G,y_G)=\left(\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right)$.

6. Aplicând formula $\cos 2x=1-2\sin^2 x$ pentru $x=\frac{}{8}$, obţinem $\cos\frac{}{4}=1-2\sin^2\frac{}{8}\Rightarrow$
$\Rightarrow 2\sin^2\frac{}{8}=1-\cos\frac{}{4}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\ \sin^2\frac{}{8}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}\Rightarrow\ \sin\frac{}{8}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}=$
$=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, unde am folosit că $\frac{}{8}\in\left(0,\frac{}{2}\right)\Rightarrow\ \sin\frac{}{8}>0$.

Varianta 31

1. Ştiind că $\log_3 2 = a$, să se demonstreze că $\log_{16} 24 = \dfrac{1+3a}{4a}$.

2. Să se determine două numere reale care au suma 1 şi produsul -1.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{2x+1} + 2^{x+2} = 160$.

4. Într-o clasă sunt 22 de elevi, dintre care 12 sunt fete. Să se determine în câte moduri se poate alege un comitet reprezentativ al clasei format din 3 fete şi 2 băieţi.

5. În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,-1)$, $B(-1,1)$ şi $C(1,3)$. Să se determine ecuaţia dreptei care trece prin punctul C şi este paralelă cu dreapta AB.

6. Să se demonstreze că $\sin 6 < 0$.

Rezolvări

1. Avem $\log_{16} 24 = \dfrac{\lg 24}{\lg 16} = \dfrac{\lg 24}{4\lg 2} = \dfrac{1}{4}\log_2 24 = \dfrac{1}{4}\left(3+\log_2 3\right) = \dfrac{1}{4}\left(3+\dfrac{1}{\log_3 2}\right) =$
$= \dfrac{1}{4}\left(3+\dfrac{1}{a}\right) = \dfrac{1+3a}{4a}$.

2. Fie $x, y \in \mathbb{R}$ numerele căutate. Avem $S = x+y = 1$ şi $P = xy = -1$, deci x şi y sunt soluţiile ecuaţiei $t^2 - St + P = t^2 - t - 1 = 0$, respectiv $t_{1,2} = \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, deci
$(x,y) \in \left\{\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right), \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$.

3. Cu notaţia $2^x = y$, $y > 0$, ecuaţia devine $2y^2 + 4y = 160 \,\big|\, :2 \Leftrightarrow\ y^2 + 2y - 80 = 0$, cu soluţiile $y_{1,2} = -1\pm 9$, deci $y_1 = -10 \notin (0,\infty)$, respectiv $y_2 = 8 \in (0,\infty)$. Revenind la notaţia $2^x = y$, obţinem $2^x = 8 \Rightarrow\ x = 3$.

4. Sunt $22-12 = 10$ băieţi, deci comitetul poate fi format în $C_{12}^3 \cdot C_{10}^2 = \dfrac{10\cdot 11\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\dfrac{9\cdot 10}{1\cdot 2} =$
$= 9900$ moduri posibile.

5. Avem $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - y_A} = \dfrac{1-(-1)}{-1-2} = -\dfrac{2}{3}$, unde $m = \text{panta}(AB)$. Fie d dreapta cu proprietăţile $d \parallel AB$ şi $C \in d$. Din $d \parallel AB \Rightarrow\ m' = m = -\dfrac{2}{3}$, unde $m' = \text{panta}(d)$. Din $C(1,3) \in d \Rightarrow$
$\Rightarrow y - y_C = m'(x - x_C) \Rightarrow\ y - 3 = -\dfrac{2}{3}(x-1) \Rightarrow\ 2x+3y-11 = 0$, deci $(d):\ 2x+3y-11 = 0$.

6. Avem $\ \in (3,4) \Rightarrow\ 6 \in \left(\dfrac{3}{2}, 2\ \ \right) \Rightarrow\ \sin 6 < 0$, deoarece $\sin x < 0$ pentru $\forall x \in \left(\dfrac{3}{2}, 2\ \ \right)$.

Varianta 32

1. Se consideră numărul real $s=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{2009}}$. Să se demonstreze că $s\in(1;2)$.

2. Se consideră funcţiile f, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$ şi $g(x)=-4x+1$. Să se determine coordonatele punctului de intersecţie a graficelor celor două funcţii.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sin x=1+\cos^2 x$.

4. Fie mulţimea $A=\{-2,-1,0,1,2\}$. Să se determine numărul funcţiilor pare $f:A\to A$.

5. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(2,-1)$, $B(-1,1)$ şi $C(1,3)$. Să se determine coordonatele punctului D, ştiind că patrulaterul ABCD este paralelogram.

6. Ştiind că $x\in\left(\frac{\ }{2};\ \right)$ şi că $\sin x=\frac{3}{5}$, să se calculeze $\sin\frac{x}{2}$.

Rezolvări

1. Avem $s=\dfrac{1-\frac{1}{2^{2010}}}{1-\frac{1}{2}}=2\left(1-\frac{1}{2^{2010}}\right)=2-\frac{1}{2^{2009}}$. Deoarece $0<\frac{1}{2^{2009}}<1\Rightarrow 1<2-\frac{1}{2^{2009}}<2\Rightarrow$ $\Rightarrow 1<s<2\Rightarrow s\in(1,2)$.

2. Abscisa puntelor de intersecţie dintre graficele funcţiilor f şi g este soluţia ecuaţiei $f(x)=g(x)\Leftrightarrow 2x-1=-4x+1\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$. Avem $f\left(\frac{1}{3}\right)=2\cdot\frac{1}{3}-1=-\frac{1}{3}\Rightarrow\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$ sunt coordonatele punctului de intersecţie.

3. Folosind că $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ pentru $\forall x\in\mathbb{R}$, ecuaţia devine $\sin x=1+1-\sin^2 x\Leftrightarrow$ $\sin^2 x+\sin x-2=0$. Cu notaţia $\sin x=y$, $y\in[-1,1]$, obţinem $y^2+y-2=0$, cu soluţiile $y_{1,2}=\frac{-1\pm 3}{2}$, deci $y_1=-2\notin[-1,1]$, respectiv $y_2=1\in[-1,1]$. Revenind la notaţia $\sin x=y$, obţinem $\sin x=1\Leftrightarrow\ x\in\left\{\frac{\ }{2}+2k\ \middle|\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

4. Avem câte $|A|=5$ posibilităţi de alegere pentru $f(0)$, respectiv pentru valorile comune $f(-2)=f(2)$ şi $f(-1)=f(1)$, deci funcţia poate fi definită în $5\cdot5\cdot5=125$ de moduri posibile.

5. Avem ABCD paralelogram dacă şi numai dacă $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\ \overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\ (2\vec{i}-\vec{j})-(-\vec{i}+\vec{j})+(\vec{i}+3\vec{j})=\ 4\vec{i}+\vec{j}\Rightarrow\ D(4,1)$.

6. Avem $x \in \left(\frac{}{2}, \quad\right) \Rightarrow \cos x < 0 \Rightarrow \cos x = -\sqrt{1-\sin^2 x} = -\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5}$. Din formula

$\cos x = 1-2\sin^2\frac{x}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, obţinem $\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2} = \frac{1-\left(-\frac{4}{5}\right)}{2} = \frac{9}{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{9}{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, unde am folosit faptul că $x \in \left(\frac{}{2}, \quad\right) \Rightarrow \frac{x}{2} \in \left(\frac{}{4}, \frac{}{2}\right) \Rightarrow \sin\frac{x}{2} > 0$.

Varianta 33

1. Să se arate că numărul $\log_4 16 + \log_3 9 + \sqrt[3]{27}$ este natural.

2. Să se determine valoarea minimă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2+4x+2$.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $16^x + 3\cdot 4^x = 4$.

4. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un element din mulţimea $\left\{\sqrt{n} \,\middle|\, n\in\mathbb{N}, n<100\right\}$, acesta să fie număr raţional.

5. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(2,-1)$, $B(-1,1)$, $C(1,3)$ şi $D(a,4)$, unde $a\in\mathbb{R}$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât dreptele AB şi CD să fie paralele.

6. Ştiind că $x\in\mathbb{R}$ şi că $tgx = \frac{1}{2}$, să se calculeze $tg\left(x+\frac{}{3}\right)$.

Rezolvări

1. Avem $\log_4 16 + \log_3 9 + \sqrt[3]{27} = 2+2+3 = 7 \in \mathbb{N}$.

2. Avem $a = 3 > 0$, $b = 4$, $c = 2$, $\Delta = b^2-4ac = 4^2-4\cdot 3\cdot 2 = -8$, deci $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = y_V =$

$= -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-8)}{4\cdot 3} = \frac{2}{3}$.

3. Folosind notaţia $4^x = y$, $y>0$, ecuaţia devine $y^2+3y = 4 \Leftrightarrow y^2+3y-4 = 0$, cu soluţiile $y_{1,\,2} = \frac{-3\pm 5}{2}$, adică $y_1 = -4 \notin (0,\infty)$, respectiv $y_2 = 1 \in (0,\infty)$. Revenind la notaţia $4^x = y$, obţinem $4^x = 1 \Rightarrow x = 0$.

4. Fie $A = \left\{\sqrt{n} \,\middle|\, n\in\mathbb{N}, n<100\right\}$. Observăm că $|A| = 100$. Ţinând cont de faptul că $\sqrt{n}\in\mathbb{Q}$ dacă şi numai dacă numărul n este pătrat perfect, obţinem că $A' = A\cap\mathbb{Q} = \left\{\sqrt{0^2}, \sqrt{1^2}, \cdots, \sqrt{9^2}\right\}$, deci $|A'| = 10$, de unde deducem că $p = \frac{|A'|}{|A|} = \frac{10}{100} = 0{,}1$.

5. Observăm că $x_A \neq x_B \Rightarrow$ AB nu este paralel cu Oy. Din $CD \| AB \Rightarrow$ nici CD nu este paralel cu Oy, deci $x_C \neq x_D \Rightarrow$ $a \neq 1$. Avem $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-(-1)}{-1-2} = -\frac{2}{3}$, unde $m = \text{panta}(AB)$, respectiv $m' = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{4-3}{a-1} = \frac{1}{a-1}$, unde $m' = \text{panta}(CD)$. Din $AB \| CD \Rightarrow m = m' \Rightarrow$ $\Rightarrow -\frac{2}{3} = \frac{1}{a-1} \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \neq 1$. În concluzie, $a = -\frac{1}{2}$.

6. Avem $\operatorname{tg}\left(x + \frac{}{3}\right) = \frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}\frac{}{3}}{1 - \operatorname{tg}x \cdot \operatorname{tg}\frac{}{3}} = \frac{\frac{1}{2} + \sqrt{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1 + 2\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \left(1 + 2\sqrt{3}\right) \cdot \left(2 + \sqrt{3}\right) = 8 + 5\sqrt{3}$.

Varianta 34

1. Să se calculeze modulul numărului complex $z = (3+4i)^4$.

2. Să se arate că vârful parabolei asociate funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + 2x + 1$ se găseşte pe dreapta de ecuaţie $x + y = 0$.

3. Să se determine numărul soluţiilor ecuaţiei $\sin x = \sin 2x$ din intervalul $[0, 2\ )$.

4. Fie mulţimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Să se determine numărul funcţiilor bijective $f : A \to A$, cu proprietatea că $f(1) = 2$.

5. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(2,-1)$, $B(-1,1)$, $C(1,3)$ şi $D(a,4)$, $a \in \mathbb{R}$. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care dreptele AB şi CD sunt perpendiculare.

6. Se consideră triunghiul ascuţitunghic ABC în care are loc relaţia $\sin B + \cos B = $ $= \sin C + \cos C$. Să se demonstreze că triunghiul ABC este isoscel.

Rezolvări

1. Avem $|3+4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \Rightarrow$ $|z| = \left|(3+4i)^4\right| = |3+4i|^4 = 5^4 = 625$.

2. Avem $a = 2$, $b = 2$, $c = 1$, $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -4$, $x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \cdot 2} = -\frac{1}{2}$, $y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-4)}{4 \cdot 2} = \frac{1}{2}$. Observăm că $x_V + y_V = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$, deci V este situat pe dreapta de ecuaţie $x + y = 0$.

3. Avem $\sin x = \sin 2x \Leftrightarrow \sin x = 2 \sin x \cos x \Rightarrow \sin x = 0$, cu soluţiile $x \in \{k\ \mid k \in \mathbb{Z}\} \cap [0, 2\ ) = \{0,\ \}$, respectiv $\cos x = \frac{1}{2}$, cu soluţiile

$x\in\left\{\pm\frac{}{3}+2k\ \middle|\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cap[0,2\ )=\left\{\frac{}{3},-\frac{}{3}+2\ \right\}=\left\{\frac{}{3},\frac{5}{3}\right\}.$

În concluzie, $x\in\{0,\ \}\cup\left\{\frac{}{3},\frac{5}{3}\right\}=\left\{0,\frac{}{3},\ ,\frac{5}{3}\right\}.$

4. Funcţia f este bijectivă şi $f(1)=2\Rightarrow\{f(2),f(3),f(4),f(5)\}=\{1,3,4,5\}$, deci avem atâtea funcţii f exact în câte moduri poate fi permutată mulţimea $\{1,3,4,5\}$, adică $4!=24$ de funcţii.

5. Avem $m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{1-(-1)}{-1-2}=-\frac{2}{3}$. Presupunând prin absurd că $a=1$, obţinem $x_C=x_D\Rightarrow CD\parallel Oy$ şi din $AB\perp CD\Rightarrow AB\parallel Ox\Rightarrow y_A=y_B\Rightarrow -1=1$, ceea ce este evident fals. Deci $a\neq1$. Avem $m'=\frac{y_D-y_C}{x_D-x_C}=\frac{4-3}{a-1}=\frac{1}{a-1}$, unde $m'=\text{panta}(CD)$.

Atunci $AB\perp CD\Leftrightarrow mm'=-1\Leftrightarrow -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{a-1}=-1\Leftrightarrow a=\frac{5}{3}\neq1$. În concluzie, $a=\frac{5}{3}$.

6. Avem $\sin x+\cos x=\sin x+\sin\left(\frac{}{2}-x\right)=2\sin\frac{x+\frac{}{2}-x}{2}\cos\frac{x-\left(\frac{}{2}-x\right)}{2}=$

$=2\sin\frac{}{4}\cos\left(x-\frac{}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{}{4}\right)$. Deci $\sin B+\cos B=\sin C+\cos C\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sqrt{2}\cos\left(B-\frac{}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(C-\frac{}{4}\right)\Rightarrow B-\frac{}{4}=C-\frac{}{4}$, adică $B=C$, sau $B-\frac{}{4}=-\left(C-\frac{}{4}\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow B+C=\frac{}{2}\Rightarrow A=\frac{}{2}$, ceea ce cotravine ipotezei că triunghiul ABC este ascuţitunghic. În concluzie, $B=C$, deci triunghiul ABC este isoscel.

Varianta 35

1. Să se calculeze modulul numărului $(2+i)^3+(2-i)^3$.

2. Graficul unei funcţii de gradul al doilea este o parabolă care trece prin punctele $A(1,-3)$, $B(-1,3)$, $C(0,1)$. Să se calculeze valoarea funcţiei în punctul $x=2$.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3\cdot4^x-6^x=2\cdot9^x$.

4. Se consideră mulţimea $A=\{0,1,2,\cdots,2009\}$. Să se determine probabilitatea ca, alegând un element din mulţimea A, acesta să fie divizibil cu 5.

5. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(0,-3)$ şi $B(4,0)$. Să se calculeze distanţa de la punctul O la dreapta AB.

6. Să se calculeze aria unui paralelogram ABCD cu $AB=6$, $AD=8$ şi $m(\sphericalangle ADC)=135^\circ$.

Rezolvări

1. Avem $(2+i)^3 = 2^3+3\cdot 2^2\cdot i+3\cdot 2\cdot i^2+i^3 = 8+12i-6-i = 2+11i$, $(2-i)^3=\overline{(2+i)^3}=$

$=\overline{2+11i}= 2-11i$, deci $z=(2+i)^3+(2-i)^3 = 2+11i+2-11i=4 \Rightarrow |z|=4$.

2. Fie $f(x)=ax^2+bx+c$, unde $a\in\mathbb{R}^*$ şi $b,c\in\mathbb{R}$. Avem $A(1,-3)\in G_f \Leftrightarrow f(1)=-3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a+b+c=-3$, $B(-1,3)\in G_f \Leftrightarrow f(-1)=3 \Leftrightarrow a-b+c=3$ şi $c(0,1)\in G_f \Leftrightarrow f(0)=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow c=1$. Folosind relaţia $c=1$, primele două ecuaţii devin $a+b=-4$ şi $a-b=2$, din care obţinem $a=-1$ şi $b=-3$, deci $f(x)=ax^2+bx+c= -x^2-3x+1$.

Atunci $f(2)=-2^2-3\cdot 2+1=-9$.

3. Avem $3\cdot 4^x-6^x=2\cdot 9^x \Big|:9^x \Leftrightarrow 3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}-\left(\frac{2}{3}\right)^x=2$. Cu notaţia $\left(\frac{2}{3}\right)^x=y$, $y>0$, ecuaţia devine $3y^2-y=2 \Leftrightarrow 3y^2-y-2=0$, cu soluţiile $y_{1,\,2}=\frac{1\pm 5}{6}$, deci $y_1=\frac{1-5}{6}=-\frac{2}{3}\notin(0,\infty)$, respectiv $y_2=\frac{1+5}{6}=1\in(1,\infty)$. Revenind la notaţia $\left(\frac{2}{3}\right)^x=y$, obţinem $\left(\frac{2}{3}\right)^x=1\Rightarrow x=0$.

4. Avem $|A|=2010$. Fie $A'=\{0,5,10,\cdots,2005\}$ submulţimea elementelor divizibile cu 5. Observăm că $|A'|=\frac{2005}{5}+1=402$, deci $p=\frac{|A'|}{|A|}=\frac{402}{2010}=\frac{1}{5}$.

5. Avem (AB): $\frac{x}{x_B}+\frac{y}{y_A}=1 \Leftrightarrow \frac{x}{4}+\frac{y}{-3}=1 \Leftrightarrow 3x-4y-12=0$, deci

$$d(O,AB)=\frac{|3\cdot 0-4\cdot 0-12|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{12}{5}.$$

6. Avem $m(\sphericalangle ADC)=135^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle BAD)=180^\circ-135^\circ=45^\circ$, deci

$S[ABCD]=AB\cdot AD\cdot\sin(\sphericalangle BAD)= 6\cdot 8\cdot\sin 45^\circ=24\sqrt{2}$.

Varianta 36

1. Se consideră numărul raţional $\frac{1}{7}$ scris sub formă de fracţie zecimală infinită $\frac{1}{7}=0,a_1a_2a_3\cdots$. Să se determine a_{60}.

2. Fie funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2-x$, $g(x)=3x+2$. Să se calculeze $(f\circ g)(x)-(g\circ f)(x)$.

3. Să se demonstreze că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^3+1$ este injectivă.

4. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să fie divizibil cu 50.

5. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care punctele $A(1,-2)$, $B(4,1)$ şi $C(-1,a)$ sunt coliniare.

6. Fie ABC un triunghi care are $AB = 3$, $AC = 5$ şi $BC = 7$. Să se calculeze $\cos A$.

Rezolvări

1. Avem $\frac{1}{7} = 0,(142857)$, deci $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 2$, $a_4 = 8$, $a_5 = 5$, $a_6 = 7$ şi $a_n = a_{n+6}$ pentru $\forall n \in \mathbb{N}^*$, de unde deducem că $a_n = a_{n+6k}$ pentru $\forall n, k \in \mathbb{N}^*$.
Observăm că $a_6 = a_{6+6\cdot 9} = a_{60} \Rightarrow a_{60} = a_6 = 7$.

2. Avem $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2 - g(x) = 2 - (3x + 2) = -3x$ şi $(g \circ f)(x) = g(f(x)) =$ $= 3f(x) + 2 = 3(2 - x) + 2 = -3x + 8$, deci $(f \circ g)(x) - (g \circ f)(x) = -3x - (-3x + 8) = -8$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

3. Avem $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3x_1^3 + 1 = 3x_2^3 + 1 \Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow \sqrt[3]{x_1^3} = \sqrt[3]{x_2^3} \Rightarrow x_1 = x_2$, $\forall\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, deci funcţia f este injectivă.

4. Fie $A = \{100, 101, \cdots, 999\}$ mulţimea numerelor naturale de trei cifre. Observăm că $|A| = 999 - 99 = 900$. Fie $A' = \{100, 150, \cdots, 950\}$ submulţimea elementelor divizibile prin 50. Observăm că elementele lui A' sunt de forma $50 \cdot k$, unde $k = \overline{2,19}$, deci $|A'| = 18$. În concluzie, avem $p = \frac{|A'|}{|A|} = \frac{18}{900} = \frac{1}{50}$.

5. A, B, C coliniare $\Leftrightarrow \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Leftrightarrow \frac{a - (-2)}{-1 - 1} = \frac{1 - (-2)}{4 - 1} \Leftrightarrow \frac{a + 2}{-2} = \frac{3}{3} \Leftrightarrow a = -4$.

6. Conform teoremei cosinusului, avem $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{3^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 3 \cdot 5} = -\frac{1}{2}$.

Varianta 37

1. Să se calculeze suma $1 + 4 + 7 + \cdots + 100$.

2. Să se determine imaginea funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x + 1$.

3. Să se arate că numărul $\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}\right) + \sin\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ este natural.

4. Să se determine numărul termenilor raţionali din dezvoltarea binomului $\left(\sqrt{2} + 1\right)^5$.

5. Fie ABCD un pătrat de latură **1.** Să se calculeze lungimea vectorului $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.

6. Să se demonstreze că $\sin 105^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

Rezolvări

1. Observăm că termenii sumei aparţin unei progresii aritmetice $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$, cu $a_1=1$ şi $r=a_2-a_1=4-1=3$, deci $a_n=a_1+\left(n-1\right)\cdot r=1+\left(n-1\right)\cdot 3=3n-2$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Avem $a_k=3k-2=100\Leftrightarrow k=34$, deci $1+4+7+\cdots+100=a_1+a_2+\cdots+a_{34}=S_{34}=$ $=\dfrac{\left(a_1+a_{34}\right)\cdot 34}{2}=\dfrac{\left(1+100\right)\cdot 34}{2}=1717$.

2. $\operatorname{Im} f=\left\{y\in\mathbb{R}\middle|\exists x\in\mathbb{R}, f\left(x\right)=y\right\}$. Avem $f\left(x\right)=y\Leftrightarrow x^2+x+1=y\Leftrightarrow x^2+x+1-y=0$.

Ecuaţia admite soluţii reale dacă şi numai dacă $\Delta=1^2-4\cdot 1\cdot\left(1-y\right)=4y-3\geq 0\Leftrightarrow y\in\left[\dfrac{3}{4},\infty\right)$, deci $\operatorname{Im} f=\left[\dfrac{3}{4},\infty\right)$.

3. Avem $E=\sin\left(\arcsin\dfrac{1}{2}\right)+\sin\left(\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{1}{2}+\sin\left(\dfrac{\;}{6}\right)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1\in\mathbb{N}$.

4. Avem $T_{k+1}=C_5^k\left(\sqrt{2}\right)^{5-k}\cdot 1^k=C_5^k\left(\sqrt{2}\right)^{4-2k}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{k+1}=2^{2-k}C_5^k\left(\sqrt{2}\right)^{k+1}$, unde $k=\overline{0,5}$.

Observăm că $T_{k+1}\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow\left(\sqrt{2}\right)^{k+1}\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow k+1\in\left\{2,4,6\right\}$.

Deci dezvoltarea conţine trei termeni raţionali, respectiv T_2, T_4 şi T_6.

5. Avem $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}$, deci $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right|=$ $=\left|2\overrightarrow{AC}\right|=2\sqrt{2}$, deoarece $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{2}$.

6. $\sin 105^\circ=\sin\left(45^\circ+60^\circ\right)=\sin 45^\circ\cos 60^\circ+\cos 45^\circ\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Varianta 38

1. Să se arate că $\log_2 3\in\left(1,2\right)$.

2. Să se determine valorile reale ale lui m pentru care $x^2+3x+m>0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sin x+\cos\left(-x\right)=1$.

4. Să se arate că, pentru orice număr natural n, $n\geq 3$, are loc relaţia $C_n^2+C_n^3=C_{n+1}^3$.

5. Se consideră dreptele de ecuaţii $d_1:\ 2x+3y+1=0$, $d_2:\ 3x+y-2=0$ şi $d_3:\ x+y+a=0$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care cele trei drepte sunt concurente.

6. Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC, ştiind că $AB=4$, $AC=3$ şi $m\left(\sphericalangle BAC\right)=60^\circ$.

Rezolvări

1. Deoarece funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_2 x$ este strict crescătoare, obţinem $2<3<4\Rightarrow$ $\Rightarrow \log_2 2<\log_2 3<\log_2 4\Rightarrow 1<\log_2 3<2\Rightarrow \log_2 3\in(1,2)$.

2. Avem $x^2+3x+m>0$ pentru $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \Delta=9-4m<0\Leftrightarrow m\in\left(\frac{9}{4},\infty\right)$.

3. $\sin x+\cos(-x)=\sin x+\cos x=\sin x+\sin\left(\frac{}{2}-x\right)=2\sin\frac{x+\frac{}{2}-x}{2}\cos\frac{x-\left(\frac{}{2}-x\right)}{2}=$

$=2\sin\frac{}{4}\cos\left(x-\frac{}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{}{4}\right)$, deci $\sin x+\cos(-x)=1\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{}{4}\right)=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow x-\frac{}{4}=\pm\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+2k \Leftrightarrow x=\frac{}{4}\pm\frac{}{4}+2k$, unde $k\in\mathbb{Z}$.

În concluzie, $x\in\{2k \mid k\in\mathbb{Z}\}\cup\left\{\frac{}{2}+2k \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

4. Conform formulei de recurenţă pentru combinări, avem $C_{n+1}^3=C_n^3+C_n^2\Leftrightarrow C_n^2+C_n^3=C_{n+1}^3$ pentru $\forall n\geq 3$.

5. Punctul P de intersecţie dintre dreptele d_1 şi d_2 are coordonatele date de soluţiile sistemului format din ecuaţiile celor două drepte, respectiv $\begin{cases}2x+3y+1=0\\3x+y-2=0\end{cases}$. Observăm că $3x+y-2=0\Rightarrow$

$\Rightarrow y=-3x+2$ şi, înlocuind în prima ecuaţie, obţinem $2x+3(-3x+2)+1=0\Rightarrow -7x+7=0\Rightarrow$ $\Rightarrow x=1$, iar $y=-3\cdot 1+2=-1$.

În concluzie, punctul P de intersecţie are coordonatele $(x_P,y_P)=(1,-1)$.

Avem d_1, d_2 şi d_3 concurente dacă şi numai dacă $P\in d_3$, deci coordonatele lui P verifică ecuaţia dreptei d_3, adică $1+(-1)+a=0\Leftrightarrow a=0$.

6. Conform teoremei lui Pitagora generalizată, avem $BC^2=AB^2+AC^2-2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos(\sphericalangle BAC)=$ $=4^2+3^2-2\cdot 4\cdot 3\cdot\cos 60^\circ=13\Rightarrow BC=\sqrt{13}$. În concluzie, perimetrul triunghiului este $AB+AC+BC=7+\sqrt{13}$.

Varianta 39

1. Se consideră numărul complex $z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Să se demonstreze că $z^2=\overline{z}$.

2. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale inecuaţia $-x^2+4x-3\geq 0$.

3. Să se arate că funcţia $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\frac{1}{x}$ este injectivă.

4. Să se determine numărul funcţiilor $f:\{1,2,3\}\to\{0,1,2,3\}$ pentru care $f(1)$ este număr par.

5. Fie ABC un triunghi care are $AB=2$, $AC=3$ şi $BC=2\sqrt{2}$. Să se calculeze $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

6. Să se arate că $\sin 15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Rezolvări

1. Avem $z^2=\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2=\dfrac{-2-2i\sqrt{3}}{4}=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}=\overline{z}$.

2. Avem $a=-1$, $b=4$, $c=-3$, $\Delta=b^2-4ac=4^2-4\cdot(-1)\cdot(-3)=4$, $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=$

$=\dfrac{-4\pm 2}{-2}=2\pm 1$, $x_1=1$, $x_2=3$, deci $-x^2+4x-3\geq 0 \Leftrightarrow x\in[1,3]$.

3. Avem $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1+\dfrac{1}{x_1}=x_2+\dfrac{1}{x_2}\Rightarrow x_1-x_2-\dfrac{x_1-x_2}{x_1x_2}=0\Rightarrow$

$\Rightarrow(x_1-x_2)\cdot\dfrac{x_1x_2-1}{x_1x_2}=0\Rightarrow x_1-x_2=0\Rightarrow x_1=x_2$, deoarece $x_1,\ x_2\in(1,\infty)\Rightarrow$

$\Rightarrow x_1x_2\in(1,\infty)\Rightarrow x_1x_2-1>0$. Deci $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$, adică funcţia f este injectivă.

4. Avem $f(1)\in\{0,1,2,3\}$ şi $f(1)$ număr par $\Rightarrow f(1)\in\{0,2\}$, deci $f(1)$ poate fi ales în două moduri posibile. Pe de altă parte, $f(2),f(3)\in\{0,1,2,3\}$ pot fi alese fiecare în patru moduri, deci avem $2\cdot 4\cdot 4=32$ de funcţii posibile.

5. Avem $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\cdot AC\cdot\cos A=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2\cdot AB\cdot AC}=\dfrac{2^2+3^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2}{2}=\dfrac{5}{2}$.

6. $\sin 15^\circ=\sin\left(45^\circ-30^\circ\right)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

Varianta 40

1. Se consideră $a\in\mathbb{R}$ şi numărul complex $z=\dfrac{a+2i}{2+ai}$. Să se determine a pentru care $z\in\mathbb{R}$.

2. Să se demonstreze că dreapta de ecuaţie $y=2x+3$ intersectează parabola de ecuaţie $y=x^2-4x+12$ într-un singur punct.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{2x-1}=x$.

4. Se consideră mulţimea $A=\{1,2,3,4,5,6\}$. Să se determine probabilitatea ca, alegând o pereche (a,b) din produsul cartezian $A\times A$, să avem egalitatea $a+b=6$.

5. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $M(2,-1)$, $A(1,2)$ şi $B(4,1)$. Să se determine lungimea vectorului $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$.

6. Să se arate că $\sin(a+b)\cdot\sin(a-b)=\sin^2 a-\sin^2 b$, pentru oricare $a,b\in\mathbb{R}$.

Rezolvări

1. Avem $z=\dfrac{a+2i}{2+ai}=\dfrac{(a+2i)(2-ai)}{2^2+a^2}=\dfrac{4a+\left(4-a^2\right)i}{4+a^2}$, deci $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \operatorname{Im}(z)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{4-a^2}{4+a^2}=0\Leftrightarrow a=\pm 2$.

2. Coordonatele eventualelor puncte comune dintre dreapta (d) şi parabola (p) sunt soluţiile (în ipoteza că există) sistemului format din ecuaţiile dreptei şi ale parabolei, respectiv $\begin{cases} y=2x+3 \\ y=x^2-4x+12\end{cases}$. Observăm că ecuaţia $x^2-4x+12=2x+3\Leftrightarrow x^2-6x+9=0$ admite soluţia dublă $x_0=3$, căreia îi corespunde $y_0=2x_0+3=9$. În concluzie, dreapta (d) şi parabola (p) au în comun doar punctul T de coordonate $(x_0,y_0)=(3,9)$.

3. Se impun condiţiile $2x-1\ge 0\Leftrightarrow x\in\left[\dfrac{1}{2},\infty\right)$, respectiv $x\ge 0\Leftrightarrow x\in[0,\infty)$, deci

$x\in\left[\dfrac{1}{2},\infty\right)\cap[0,\infty)=\left[\dfrac{1}{2},\infty\right)$. Avem $\sqrt{2x-1}=x\Rightarrow 2x-1=x^2\Rightarrow x^2-2x+1=0\Rightarrow$

$\Rightarrow x=1\in\left[\dfrac{1}{2},\infty\right)$.

4. Avem $|A|=6\Rightarrow |A\times A|=6^2=36$. Observăm că $M=\left\{(a,b)\in A\times A \,\middle|\, a+b=6\right\}=$

$=\left\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\right\}$ şi $|M|=5$, deci $p=\dfrac{|M|}{|A\times A|}=\dfrac{5}{36}$.

5. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\ \overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}=\ \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OM}=\ \vec{i}+2\vec{j}+4\vec{i}+\vec{j}-2\left(2\vec{i}-\vec{j}\right)=$

$\Rightarrow \vec{i}+5\vec{j}\Rightarrow \left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\vec{i}+5\vec{j}\right|=\sqrt{1^2+5^2}=\sqrt{26}$.

6. Avem $\sin(a+b)\cdot\sin(a-b)=(\sin a\cos b+\cos a\sin b)\cdot\ (\sin a\cos b-\cos a\sin b)=$

$=\sin^2 a\cos^2 b-\cos^2 a\sin^2 b=\sin^2 a\cdot\left(1-\sin^2 b\right)-\left(1-\sin^2 a\right)\cdot\sin^2 b=\sin^2 a-\sin^2 b$ pentru $\forall a,b\in\mathbb{R}$.

Varianta 41

1. Să se arate că numărul $100^{\lg 2}+\sqrt[3]{-27}$ este natural.

2. Să se determine imaginea funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{x+1}=-3^x+8$.

4. Să se determine numărul funcţiilor $f:\{1,2,3,4\}\to\{1,2,3,4\}$ care au proprietatea că $f(1)+f(3)=7$.

5. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(2,-1)$ şi $B(-1,1)$. Să se determine ecuaţia dreptei care trece prin originea axelor şi este paralelă cu dreapta AB.

6. Fie a şi b numere reale astfel încât $\sin a+\sin b=1$ şi $\cos a+\cos b=\frac{1}{2}$. Să se calculeze $\cos(a-b)$.

Rezolvări

1. Avem $100^{\lg 2}+\sqrt[3]{-27}=\left(10^{\lg 2}\right)^2+\sqrt[3]{(-3)^3}=2^2+(-3)=4-3=1\in\mathbb{N}$.

2. $\operatorname{Im} f=\{y\in\mathbb{R}\mid \exists x\in\mathbb{R}, f(x)=y\}$. Avem $\frac{2x}{x^2+1}=y\Leftrightarrow yx^2-2x+y=0$. Pentru $y=0$, obţinem $x=0$. Pentru $y\neq 0$, ecuaţia admite soluţii reale dacă şi numai dacă $\Delta=4-4y^2\geq 0\Leftrightarrow y\in[-1,1]$. Deci $\operatorname{Im} f=[-1,1]$.

3. Avem $3^{x+1}=-3^x+8\Leftrightarrow 4\cdot 3^x=8\Leftrightarrow 3^x=2\Leftrightarrow x=\log_3 2$.

4. Observăm că $x,y\in\{1,2,3,4\}$ şi $x+y=7\Rightarrow x=3$ şi $y=4$, respectiv cazul $x=4$ şi $y=3$, deci $f(1)+f(3)=7\Rightarrow f(1)=3$ şi $f(3)=4$, respectiv cazul $f(1)=4$ şi $f(3)=3$. Valorile pentru $f(2),f(4)\in\{1,2,3,4\}$ pot fi alese fiecare în câte 4 moduri posibile, deci avem $2\cdot 4\cdot 4=32$ de astfel de funcţii.

5. Avem $m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{1-(-1)}{-1-2}=-\frac{2}{3}$, unde $m=\text{panta}(AB)$. Fie d dreapta cu proprietăţile $d\parallel AB$ şi $O\in d$. Din $d\parallel AB\Rightarrow m'=m=-\frac{2}{3}$, unde $m'=\text{panta}(d)$. Din $O(0,0)\in d\Rightarrow$

$\Rightarrow y-y_O=m'(x-x_O)\Rightarrow y=-\frac{2}{3}x\Rightarrow 2x+3y=0$.

6. Avem $\sin a+\sin b=1\Rightarrow(\sin a+\sin b)^2=1^2\Rightarrow\sin^2 a+\sin^2 b+2\sin a\sin b=1$. Similar, avem $\cos^2 a+\cos^2 b+2\cos a\cos b=\frac{1}{4}$. Adunând cele două relaţii membru cu membru, şi ţinând cont că $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ pentru $\forall x\in\mathbb{R}$, obţinem $2+2(\cos a\cos b+\sin a\sin b)=1+\frac{1}{4}\Rightarrow$

$\Rightarrow 2+2\cos(a-b)=\frac{5}{4}\Rightarrow\cos(a-b)=-\frac{3}{8}$.

Varianta 42

1. Să se calculeze partea întreagă a numărului $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}$.

2. Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul $\begin{cases} y = x^2-3x+1 \\ y = 2x^2+x+4 \end{cases}$.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arcctg}\frac{1}{3}=\frac{}{2}$.

4. Să se determine numărul termenilor raţionali ai dezvoltării $\left(\sqrt[4]{5}+1\right)^{100}$.

5. Să se arate că punctele $A(-1,5)$, $B(1,1)$ şi $C(3,-3)$ sunt coliniare.

6. Să se calculeze lungimea razei cercului înscris în triunghiul care are lungimile laturilor 4, 5 şi 7.

Rezolvări

1. Avem $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}=\frac{1-\frac{1}{3^4}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{3}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{3^4}\right)=\frac{20}{27}$, iar $\left[\frac{20}{27}\right]=0$.

2. Avem $x^2-3x+1=2x^2+x+4 \Leftrightarrow x^2+4x+3=0$, cu soluţiile $x_1=-1$ şi $x_2=-3$. Înlocuind în $y=x^2-3x+1$, obţinem $y_1=(-1)^2-3\cdot(-1)+1=5$, respectiv $y_2=(-3)^2-3\cdot(-3)+1=19$, deci soluţiile sistemului sunt $S=\{(-1,5),(-3,19)\}$.

3. Avem $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arcctg}\frac{1}{3}=\frac{}{2} \Leftrightarrow \operatorname{arctg}x=\frac{}{2}-\operatorname{arcctg}\frac{1}{3}=\operatorname{arctg}\frac{1}{3} \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$, unde am folosit faptul că $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arcctg}x=\frac{}{2}$ pentru $\forall x\in\mathbb{R}$.

4. Avem $T_{k+1}=C_{100}^{k}\left(\sqrt[4]{5}\right)^{100-k}\cdot 1^k=C_{100}^{k}\frac{\left(\sqrt[4]{5}\right)^{100}}{\left(\sqrt[4]{5}\right)^{k}}=C_{100}^{k}\frac{5^{25}}{\left(\sqrt[4]{5}\right)^{k}}$, unde $k=\overline{0,100}$. Deoarece $\sqrt[4]{5}\notin Q$ şi $\left(\sqrt[4]{5}\right)^k\in Q \Leftrightarrow 4/k \Leftrightarrow k\in M=\{0,4,8,\cdots,96,100\}$, deducem dezvoltarea conţine $|M|=1+\frac{100}{4}=26$ de termeni raţionali.

5. Observăm că $x_B=\frac{x_A+x_C}{2}$ şi $y_B=\frac{y_A+y_C}{2}$, deci B este mijlocul segmentului AB, în particular punctele A, B şi C sunt coliniare.

6. Fie $a=4$, $b=5$, $c=7$ şi $p=\frac{a+b+c}{2}=8$. Conform formulei lui Heron, avem $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{8\cdot 4\cdot 3\cdot 1}=4\sqrt{6}$. Pe de altă parte, avem $S=p\cdot r$, unde r este lungimea razei cercului înscris în triunghi, deci $4\sqrt{6}=8r\Rightarrow r=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Varianta 43

1. Să se determine valoarea de adevăr a propoziţiei: „Suma oricăror două numere iraţionale este număr iraţional".

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2$. Să se rezolve ecuaţia $f(f(x))=f^2(x)$.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^x-2^x=12$.

4. Fie mulţimea $A=\{1,2,3,4,5,6\}$. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând o pereche (a,b) din mulţimea $A\times A$, produsul numerelor a şi b să fie impar.

5. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(1,3)$ şi $C(-1,1)$. Să se calculeze aria pătratului de diagonală AC.

6. Să se demonstreze că $\sin 105^\circ+\sin 75^\circ=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

Rezolvări

1. Afirmaţia este falsă. De exemplu, pentru $a=\sqrt{2}$ şi $b=-\sqrt{2}$, avem $a,b\notin\mathbb{Q}$, dar $a+b=\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0\in\mathbb{Q}$.

2. Avem $f(f(x))=f(x)+2=(x+2)+2=x+4$, deci $f(f(x))=f^2(x)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x+4=(x+2)^2\Leftrightarrow x+4=x^2+4x+4\Leftrightarrow x^2+3x=0$, cu soluţiile $x_1=-3$ şi $x_2=0$, deci $x\in\{-3,0\}$.

3. Folosind notaţia $2^x=y$, $y>0$, ecuaţia devine $y^2-y=12\Leftrightarrow y^2-y-12=0$, cu soluţiile $y_1=-3\notin(0,\infty)$, respectiv $y_2=4\in(0,\infty)$. Revenind la notaţia $2^x=y$, obţinem $2^x=4\Rightarrow$ $\Rightarrow x=2$.

4. Observăm că $|A|=6$, deci $|A\times A|=|A|^2=6^2=36$. Fie $A'=\{1,3,5\}$ submulţimea numerelor impare, deci $|A'|=3$ şi $|A'\times A'|=|A'|^2=3^2=9$. Pentru $\forall(a,b)\in A\times A$, avem ab impar dacă şi numai dacă a şi b impare, adică $(a,b)\in A'\times A'$, deci $p=\frac{|A'\times A'|}{|A\times A|}=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}=0,25$.

5. Avem $AC=\sqrt{(-1-1)^2+(1-3)^2}=2\sqrt{2}$. Ştiind că $d=a\sqrt{2}$, unde am notat cu „d", respectiv „a", diagonala, respectiv latura, unui pătrat, obţinem că $a\sqrt{2}=2\sqrt{2}\Rightarrow a=2\Rightarrow S=a^2=4$, unde S reprezintă suprafaţa pătratului de latură $a=2$.

6. Avem $\sin 105^\circ = \sin\left(60^\circ + 45^\circ\right) = \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} =$
$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ şi $\sin 75^\circ = \sin\left(180^\circ - 75^\circ\right) = \sin 105^\circ$, deci $\sin 105^\circ + \sin 75^\circ = 2\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} =$
$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

Varianta 44

1. Să se determine partea reală a numărului complex $z = \frac{1-i}{1+i}$.

2. Să se determine valorile reale ale lui m pentru care $x^2 + mx + 1 \geq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\arcsin 2x = -\frac{1}{2}$.

4. Se consideră mulţimea $A = \{0,1,2,3,\cdots,9\}$. Să se determine numărul submulţimilor mulţimii A care au 5 elemente dintre care exact două sunt numere pare.

5. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $B(-1,2)$ şi $C(2,-2)$. Să se determine distanţa de la punctul O la dreapta BC.

6. Ştiind că $\in \left(\frac{}{2}, \right)$ şi că $\sin = \frac{3}{5}$, să se calculeze ctg .

Rezolvări

1. Avem $z = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{-2i}{2} = -i \Rightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$.

2. Avem $x^2 + mx + 1 \geq 0$ pentru $\forall x \in \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă $\Delta = m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow m \in (-2,2)$.

3. Se impune condiţia $2x \in [-1,1] \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$. Avem $\arcsin 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x = \sin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\sin\frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2} \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

4. Avem $|A| = 10$. Fie $B = \{0,2,4,6,8\}$ submulţimea numerelor pare, iar $C = \{1,3,5,7,9\}$ submulţimea numerelor impare. Evident $|B| = |C| = 5$. O submulţime de 5 elemente dintre care exact două sunt pare (deci celelalte trei sunt impare) poate fi formată în $C_5^2 \cdot C_5^3 = 100$ moduri posibile, unde am folosit că avem $C_5^2 = C_5^3 = \frac{4\cdot 5}{2} = 10$.

5. Avem $(BC): \ \frac{y-y_B}{y_C-y_B}=\frac{x-x_B}{x_C-x_B} \Leftrightarrow \ \frac{y-2}{-2-2}=\frac{x-(-1)}{2-(-1)} \Leftrightarrow \ \frac{y-2}{-4}=\frac{x+1}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x+3y-2=0$, deci $d(O,BC)=\frac{|4\cdot 0+3\cdot 0-2|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{2}{5}$.

6. Avem $\ \in\left(\frac{\ }{2},\ \ \right) \Rightarrow \ \cos\ \ <0 \Rightarrow \ \cos\ \ =-\sqrt{1-\sin^2\ \ } \ = \ -\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} \ = \ -\frac{4}{5}$, deci

$\mathrm{ctg}\ \ =\frac{\cos\ }{\sin\ }= \ \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=-\frac{4}{3}$.

Varianta 45

1. Să se determine partea întreagă a numărului $\frac{7}{5\sqrt{2}-1}$.

2. Fie x_1 şi x_2 soluţiile reale ale ecuaţiei $x^2+x-1=0$. Să se arate că $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}\in\mathbb{Z}$.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2\cdot 3^x+3^{1-x}=7$.

4. Se consideră mulţimile $A=\{1,2,3,4\}$ şi $B=\{1,2,3,4,5,6\}$. Să se determine numărul funcţiilor strict crescătoare $f:A\to B$.

5. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(1,3)$, $B(-2,1)$ şi $C(-3,-1)$. Să se calculeze lungimea înălţimii duse din vârful A în triunghiul ABC.

6. Să se arate că $2\cdot\left(\sin 75^\circ-\sin 15^\circ\right)=\sqrt{2}$.

Rezolvări

1. Avem $\frac{7}{5\sqrt{2}-1}=\frac{7\left(5\sqrt{2}+1\right)}{\left(5\sqrt{2}\right)^2-1^2}=\frac{7\left(5\sqrt{2}+1\right)}{49}=\frac{5\sqrt{2}+1}{7}$. Avem $50>36\Rightarrow \sqrt{50}>\sqrt{36}\Rightarrow$

$\Rightarrow 5\sqrt{2}>6\Rightarrow 5\sqrt{2}+1>7\Rightarrow \frac{5\sqrt{2}+1}{7}>1$, respectiv $5\sqrt{2}+1<5\cdot 2+1=11\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{5\sqrt{2}+1}{7}<\frac{11}{7}<2$. Din $1<\frac{5\sqrt{2}+1}{7}<2\Rightarrow \left[\frac{5\sqrt{2}+1}{7}\right]=1$.

2. Avem $S=x_1+x_2= \ -\frac{b}{a}=-1$ şi $P=x_1x_2= \ \frac{c}{a}=-1$. Atunci $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=$

$=\frac{S^2-2P}{P}=\frac{(-1)^2-2\cdot(-1)}{-1}= \ -3\in\mathbb{Z}$.

3. Avem $2\cdot 3^x+3^{1-x}=7\Big|\cdot 3^x \Rightarrow\ 2\cdot 3^{2x}+3=7\cdot 3^x$. Folosind notaţia $3^x=y,\ y>0$, obţinem ecuaţia $2y^2+3=7y \Leftrightarrow\ 2y^2-7y+3=0$, cu soluţiile $y_1=\dfrac{1}{2}$, respectiv $y_2=3$. Revenind la notaţia $3^x=y$, obţinem $3^{x_1}=y_1=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\ x_1=\log_3\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\log_3 2$, respectiv $3^{x_2}=y_2=3\Rightarrow$ $\Rightarrow x_2=1$, deci $x\in\{-\log_3 2,1\}$.

4. Avem $|A|=4$ şi $|B|=6$. Construirea unei funcţii $f:A\to B$ strict crescătoare presupune alegerea unei submulţimi $\{b_1,b_2,b_3,b_4\}\subset B$, ale cărei elemente le putem considera ca fiind scrise în ordine crescătoare $b_1<b_2<b_3<b_4$ şi definim $f(k)=b_k,\ \forall k=\overline{1,4}$.
Deci avem $C_6^4=\dfrac{5\cdot 6}{2}=15$ asemenea funcţii.

5. Avem $(BC):\ \dfrac{y-y_B}{y_C-y_B}=\dfrac{x-x_B}{x_C-x_B}\Leftrightarrow\ \dfrac{y-1}{-1-1}=\dfrac{x-(-2)}{-3-(-2)}\Leftrightarrow\ \dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{x+2}{-1}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2x-y+5=0$. Lungimea înălţimii duse din vârful A în triunghiul ABC este

$$d(A,BC)=\frac{|2\cdot 1-3+5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\ \frac{4}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

6. Avem $2\cdot\left(\sin 75^\circ-\sin 15^\circ\right)=\ 2\cdot 2\sin\dfrac{75^\circ-15^\circ}{2}\cos\dfrac{75^\circ+15^\circ}{2}=\ 4\sin 30^\circ\cos 45^\circ=$ $=4\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$.

Varianta 46

1. Fie $(a_n)_{n\ge 1}$ o progresie aritmetică. Ştiind că $a_3+a_{19}=10$, să se calculeze a_6+a_{16}.

2. Să se determine valorile parametrului real m pentru care ecuaţia $x^2-mx+1-m=0$ are două rădăcini reale distincte.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\lg^2 x+\lg x=6$.

4. Se consideră mulţimile $A=\{1,2,3\}$ şi $B=\{1,2,3,4,5\}$. Să se determine numărul funcţiilor strict descrescătoare $f:A\to B$, cu proprietatea că $f(3)=1$

5. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $M(2,-1)$, $N(-1,1)$ şi $P(0,3)$. Să se determine coordonatele punctului Q astfel încât MNPQ să fie paralelogram.

6. Să se calculeze lungimea medianei duse din A în triunghiul ABC, ştiind că $AB=2$, $AC=3$ şi $BC=4$.

Rezolvări

1. Avem formula termenului general $a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, unde r este raţia progresiei aritmetice. Atunci $a_3 + a_{19} = a_1 + 2r + a_1 + 18r = 2a_1 + 20r$, respectiv $a_6 + a_{16} = $
$= a_1 + 5r + a_1 + 15r = 2a_1 + 20r$, deci $a_6 + a_{16} = a_3 + a_{19} = 10$.

2. Ecuaţia $x^2 - mx + 1 - m = 0$ admite două rădăcini reale distincte dacă şi numai dacă $\Delta = (-m)^2 - 4(1-m) = m^2 + 4m - 4 > 0 \Leftrightarrow m \in \left(-\infty, -2-2\sqrt{2}\right) \cup \left(-2+2\sqrt{2}, \infty\right)$.

3. Se impune condiţia $x > 0 \Leftrightarrow x \in (0, \infty)$. Folosind notaţia $\lg x = y$, ecuaţia devine $y^2 + y = 6 \Leftrightarrow y^2 + y - 6 = 0$, cu soluţiile $y_1 = -3$ şi $y_2 = 2$. Revenind la notaţia $\lg x = y$, obţinem $\lg x_1 = y_1 = -3 \Rightarrow x_1 = 10^{-3} = \dfrac{1}{1000}$, respectiv $\lg x_2 = y_2 = 2 \Rightarrow x_2 = 10^2 = 100$, deci $x \in \left\{\dfrac{1}{1000}, 100\right\}$.

4. O funcţie $f : \{1,2,3\} \to \{1,2,3,4,5\}$ este strict descrescătoare dacă şi numai dacă $f(3) < f(2) < f(1)$. În ipoteza că $f(3) = 1$, obţinem că $\{f(2), f(1)\} \subset \{2,3,4,5\}$, deci avem $C_4^2 = \dfrac{3\cdot 4}{2} = 6$ funcţii posibile, exact câte submulţimi de forma $\{a,b\}$ admite mulţimea $\{2,3,4,5\}$, definind $f(2) = \min\{a,b\}$ şi $f(1) = \max\{a,b\}$.

5. Avem $\overrightarrow{MN} = (x_N - x_M)\cdot\vec{i} + (y_N - y_M)\cdot\vec{j} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$ şi $\overrightarrow{QP} = (x_P - x_Q)\cdot\vec{i} + (y_P - y_Q)\cdot\vec{j} = $
$= -x_Q\vec{i} + (3 - y_Q)\cdot\vec{j}$. Avem MNPQ paralelogram dacă şi numai dacă $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{MN} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -x_Q\vec{i} + (3-y_Q)\cdot\vec{j} = -3\vec{i} + 2\vec{j} \Leftrightarrow -x_Q = -3$ şi $3 - y_Q = 2 \Leftrightarrow x_Q = 3$ şi $y_Q = 1 \Rightarrow$ Q are coordonatele $(x_Q, y_Q) = (3,1)$.

6. Conform teoremei medianei, $m_a^2 = \dfrac{2\left(AB^2 + AC^2\right) - BC^2}{4} = \dfrac{2\cdot\left(2^2+3^2\right) - 4^2}{4} = \dfrac{10}{4} \Rightarrow$
$\Rightarrow m_a = \sqrt{\dfrac{10}{4}} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$, unde m_a reprezintă lungimea medianei din A.

Varianta 47

1. Să se arate că numărul $(2+i)^4 + (2-i)^4$ este întreg.

2. Să se determine coordonatele punctelor de intersecţie dintre dreapta de ecuaţie $y = 2x + 1$ şi parabola de ecuaţie $y = x^2 + x + 1$.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2x + \sqrt{16 + x^2} = 11$.

4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de patru cifre, acesta să fie divizibil cu 9.

5. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(-1,1)$, $B(1,3)$ şi $C(3,2)$. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC. Să se determine ecuaţia dreptei OG.

6. Să se arate că $2\cdot\left(\cos 75^\circ+\cos 15^\circ\right)=\sqrt{6}$.

Rezolvări

1. Avem $(2+i)^2=3+4i$, $(3+4i)^2=-7+24i$, deci $(2+i)^4=\left[(2+i)^2\right]^2=(3+4i)^2=$ $=-7+24i$, respectiv $(2-i)^4=\overline{(2+i)^4}=\overline{-7+24i}=-7-24i$, deci $(2+i)^4+(2-i)^4=$ $=-7+24i-7-24i=-14\in\mathbb{Z}$.

2. Coordonatele punctelor de intersecţie dintre dreapta $(d):\ y=2x+1$ şi parabola $(p):\ y=x^2+x+1$ sunt soluţiile sistemului $\begin{cases}y=2x+1\\ y=x^2+x+1\end{cases}\Rightarrow\ x^2+x+1=2x+1\Rightarrow$ $\Rightarrow x^2-x=0$, cu soluţiile $x_1=0$ şi $x_2=1$. Înlocuind în $y=2x+1$, obţinem corespunzător $y_1=2x_1+1=2\cdot 0+1=1$ şi $y_2=2x_2+1=2\cdot 1+1=3$, deci coordonatele punctelor de intersecţie sunt $(x_1,y_1)=(0,1)$, respectiv $(x_2,y_2)=(1,3)$.

3. Avem $2x+\sqrt{16+x^2}=11\Leftrightarrow\sqrt{16+x^2}=11-2x$. Se observă că este necesară condiţia $11-2x\ge 0\Leftrightarrow\ x\in\left(-\infty,\frac{11}{2}\right]$. Atunci $\sqrt{16+x^2}=11-2x\Rightarrow\left(\sqrt{16+x^2}\right)^2=(11-2x)^2\Rightarrow$ $\Rightarrow 16+x^2=121-44x+4x^2\Rightarrow 3x^2-44x+105=0$, cu soluţiile $x_1=3\in\left(-\infty,\frac{11}{2}\right]$, respectiv $x_2=\frac{35}{3}\notin\left(-\infty,\frac{11}{2}\right]$, deci $x=3$.

4. Fie $A=\{1000,1001,\cdots,9999\}$ mulţimea numerelor naturale de patru cifre. Avem $|A|=9999-999=9000$. Fie $A'=\{1008,1017,\cdots,9990,9999\}$ submulţimea multiplilor de 9. Observăm că $1008=9\cdot 112$, $1017=9\cdot 113$, ..., $9999=9\cdot 1111$, deci $|A'|=1111-111=1000$, de unde deducem că $p=\frac{|A'|}{|A|}=\frac{1000}{9000}=\frac{1}{9}$.

5. Avem $x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}=\frac{-1+1+3}{3}=1$ şi $y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}=\frac{1+3+2}{3}=2$, deci G are coordonatele $(x_G,y_G)=(1,2)$. Atunci $(OG):\frac{x}{1}=\frac{y}{2}\Leftrightarrow 2x-y=0$.

6. Avem $2\cdot\left(\cos 75^\circ+\cos 15^\circ\right)=2\cdot 2\cos\frac{75^\circ+15^\circ}{2}\cos\frac{75^\circ-15^\circ}{2}=4\cos 45^\circ\cos 30^\circ=$ $=4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{6}$.

Varianta 48

1. Să se determine partea reală a numărului complex $\left(\sqrt{3}+i\right)^6$.

2. Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Să se calculeze $(f\circ f)(512)$.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\cos 2x+\sin x=0$.

4. Se consideră mulţimea $M=\{0,1,2,3,4,5\}$. Să se determine numărul tripletelor (a,b,c) cu proprietatea că a, b, c$\in$ M şi $a<b<c$.

5. Să se calculeze distanţa dintre dreptele paralele de ecuaţii $x+2y=6$ şi $2x+4y=11$.

6. Paralelogramul ABCD are $AB=1$, $BC=2$ şi $m(\sphericalangle BAD)=60^\circ$. Să se calculeze produsul scalar $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$.

Rezolvări

1. Avem $z=\left(\sqrt{3}+i\right)^6=\left[2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^6=2^6(\cos\pi+i\sin\pi)=64\cdot(-1)=-64\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{Re}(z)=-64$.

2. Avem $f(512)=\frac{1}{\sqrt[3]{512}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2^9}}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$ şi $f\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{8}}}=2$, deci $(f\circ f)(512)=$

$=f(f(512))=f\left(\frac{1}{8}\right)=2$.

3. Avem $\cos 2x+\sin x=0\Leftrightarrow 1-2\sin^2 x+\sin x=0\Leftrightarrow 2\sin^2 x-\sin x-1=0$. Folosind notaţia $\sin x=y$, $y\in[-1,1]$, obţinem ecuaţia $2y^2-y-1=0$ cu soluţiile $y_1=-\frac{1}{2}\in[-1,1]$ şi $y_2=1\in[-1,1]$. Revenind la notaţia $\sin x=y$, obţinem $\sin x=-\frac{1}{2}\Rightarrow\ \Rightarrow x\in\left\{(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+k\pi \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$, respectiv $\sin x=1\Rightarrow\ x\in\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$. Deci $x\in\left\{(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+k\pi \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

4. Avem $|M|=6$. Observăm că orice submulţime $\{a,b,c\}\subset M$ poate fi ordonată crescător în mod unic, deci putem forma $C_6^3=\frac{4\cdot5\cdot6}{1\cdot2\cdot3}=20$ de triplete (a,b,c) cu proprietatea $a<b<c$.

5. Fie $(d):\ x+2y=6$ şi $(d'):\ 2x+4y=11\Leftrightarrow\ 2x+4y-11=0$. Observăm că $A(6,0)\in d\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{dist}(d,d')=\frac{|2\cdot6+4\cdot0-11|}{\sqrt{2^2+4^2}}=\frac{1}{\sqrt{20}}=\frac{\sqrt{5}}{10}$.

6. Avem $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}=AB\cdot AD\cdot\cos(\sphericalangle BAD)+BC^2=$

$=1\cdot2\cdot\cos60^\circ+2^2=5$.

Varianta 49

1. Să se arate că numărul $\log_9 \sqrt{3} + \log_4 \sqrt[3]{2}$ este raţional.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx^2 - 2mx + m - 1$, $m \in \mathbb{R}^*$. Să se determine $m \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $f(x) \le 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^x + 2^{x+1} + 2^{x-1} = 56$.

4. Fie mulţimea $A = \{1, 2, \cdots, 1000\}$. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un element din mulţimea $\left\{\sqrt[3]{n} \,\middle|\, n \in A\right\}$, acesta să fie număr raţional.

5. Fie triunghiul ABC şi $M \in (BC)$ astfel încât $\overrightarrow{MC} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$. Să se demonstreze că $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{CA}$.

6. Ştiind că $x \in \left(0, \frac{\ }{2}\right)$ şi că $\operatorname{tg} x = 3$, să se calculeze $\sin 2x$.

Rezolvări

1. Avem $\log_9 \sqrt{3} + \log_4 \sqrt[3]{2} = \log_9 \sqrt[4]{9} + \log_4 \sqrt[6]{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12} \in \mathbb{Q}$.

2. Avem $f(x) \le 0$ pentru $\forall x \in \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă $m < 0$, adică $m \in (-\infty, 0)$, şi $\Delta = (-2m)^2 - 4m(m-1) = 4m \le 0$, adică $m \in (-\infty, 0]$, deci $m \in (-\infty, 0) \cap (-\infty, 0] = (-\infty, 0) \subset \mathbb{R}^*$.

3. Avem $2^x + 2^{x+1} + 2^{x-1} = 56 \Leftrightarrow 2^{x-1}(2 + 2^2 + 1) = 2^{x-1} \cdot 7 = 56 \Leftrightarrow 2^{x-1} = \frac{56}{7} = 8 = 2^3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x - 1 = 3 \Leftrightarrow x = 4$.

4. Avem $|A| = 1000$, deci $\left|\left\{\sqrt[3]{n} \,\middle|\, n \in A\right\}\right| = |A| = 1000$. Observăm că $\sqrt[3]{n} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $n = k^3 \Rightarrow n \in B = \left\{k^3 \,\middle|\, k \in \mathbb{N}^*\right\} \cap A = \left\{1^3, 2^3, \cdots, 10^3\right\}$. Evident $|B| = 10$, deci $p = \frac{|B|}{|A|} = \frac{10}{1000} = 0{,}01$.

5. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} = -\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{CA} - \left(-\frac{3}{4}\overrightarrow{CB}\right) = -\overrightarrow{CA} + \frac{3}{4}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right) = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{CA}$.

6. Avem $\sin 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2 \cdot 3}{1 + 3^2} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

Varianta 50

1. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât numerele 2^{a-1}, $2^{-a+2}+1$, $2^{a+1}+1$ să fie în progresie aritmetică.

2. Să se arate că vârful parabolei $y = x^2 + (2a-1)x + a^2$, $a \in \mathbb{R}$, este situat pe dreapta de ecuaţie $4x+4y=1$.

3. Să se arate că, dacă z este soluţie a ecuaţiei $z^2+2z+4=0$, atunci $z^2 - \frac{8}{z} = 0$.

4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $\{11, 12, \cdots, 50\}$, acesta să fie divizibil cu 2 şi cu 5.

5. Trapezul isoscel ABCD are bazele $[AB]$ şi $[CD]$ şi lungimea înălţimii egală cu 4. Să se calculeze $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right|$.

6. Să se calculeze $\mathrm{tg}2$, ştiind că $\in \left(0, \frac{}{2}\right)$ şi $\sin = \frac{12}{13}$.

Rezolvări

1. Avem $\div 2^{a-1}, 2^{-a+2}+1, 2^{a+1}+1 \Leftrightarrow 2^{a-1}+2^{a+1}+1 = 2\left(2^{-a+2}+1\right) \Leftrightarrow 2^{a-1}+2^{a+1} = 2^{-a+3}+1$.

Folosind notaţia $2^a = x$, $x > 0$, ecuaţia devine $\frac{x}{2}+2x = \frac{8}{x}+1 \Leftrightarrow \frac{5x}{2} = \frac{8+x}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow 5x^2-2x-16=0$, cu soluţiile $x_1 = -\frac{8}{5} \notin (0,\infty)$, respectiv $x_2 = 2 \in (0,\infty)$. Revenind la notaţia $2^a = x$, obţinem $2^a = 2 \Rightarrow a=1$.

2. Parabola $y = x^2+(2a-1)x+a^2$ are vârful de coordonate $x_V = -\frac{2a-1}{2}$ şi

$y_V = -\frac{(2a-1)^2-4a^2}{4} = -\frac{-4a+1}{4}$. Observăm că $4x_V+4y_V = 4\left(-\frac{2a-1}{2}\right)+4\left(-\frac{-4a+1}{4}\right) =$

$= -4a+2+4a-1=1$, deci vârful V este situat pe dreapta de ecuaţie $4x+4y=1$.

3. Fie z o soluţie a ecuaţiei $z^2+2z+4=0$. Evident $z \neq 0$ şi $z^2 = -2z-4 \Rightarrow z^2-\frac{8}{z} =$

$= -2z-4-\frac{8}{z} = \frac{-2z^2-4z-8}{z} = -2 \cdot \frac{z^2+2z+4}{z} = -2 \cdot \frac{0}{z} = 0$.

4. Fie $M = \{11,12,\cdots,50\}$. Evident $|M| = 50-10 = 40$. Observăm că $2/n$ şi $5/n \Leftrightarrow 10/n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, deoarece $\text{c.m.m.m.c.}(2,5)=10$. Atunci $M' = \{n \in M | 10/n\} = \{20,30,40,50\}$ este submulţimea lui M formată din numerele divizibile prin 2 şi prin 5, deci $p = \frac{|M'|}{|M|} = \frac{4}{40} = 0{,}1$.

5. Fie O punctul de intersecţie dintre diagonalele AC şi BD, iar M şi N mijloacele bazelor AB, respectiv CD. Deoarece ABCD este trapez isoscel, avem $OA=OB$ şi $OC=OD \Rightarrow OM \perp AB$ şi $ON \perp CD \Rightarrow O \in MN$ şi $MN \perp AB \Rightarrow MN = 4$. Avem $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NC}$ şi

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{ND}$, deci $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}\right) + 2\overrightarrow{MN} + \left(\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND}\right) = \vec{0} + 2\overrightarrow{MN} + \vec{0} =$
$= 2\overrightarrow{MN} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right| = \left|2\overrightarrow{MN}\right| = 2MN = 2 \cdot 4 = 8$.

6. Avem $\quad \in \left(0, \frac{}{2}\right) \Rightarrow \cos \quad > 0$, deci $\cos \quad = \sqrt{1 - \sin^2 \quad} = \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \frac{5}{13}$. Atunci

$$\mathrm{tg} \quad = \frac{\sin}{\cos} = \frac{12}{13} \cdot \frac{13}{5} = \frac{12}{5} \text{ şi } \mathrm{tg}2 \quad = \frac{2\mathrm{tg}}{1 - \mathrm{tg}^2} = \frac{2 \cdot \frac{12}{5}}{1 - \left(\frac{12}{5}\right)^2} = -\frac{120}{119}.$$

Varianta 51

1. Să se determine numărul elementelor mulţimii $(A - B) \cap \mathbb{Z}$, ştiind că $A = (-3, 4]$ şi $B = (1, 5]$.

2. Să se determine coordonatele punctelor de intersecţie a dreapta $y = 2x + 1$ cu parabola $y = x^2 - x + 3$.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x-1} + \sqrt{2-x} = 1$.

4. Să se rezolve în mulţimea numerelor naturale inecuaţia $2^{x!} \leq 2048$.

5. Să se calculeze distanţa de la punctul $A(1,1)$ la dreapta $d: 5x + 12y - 4 = 0$.

6. Să se calculeze $\mathrm{tg}(a+b)$ ştiind că $\mathrm{ctg}a = 2$ şi $\mathrm{ctg}b = 5$.

Rezolvări

1. Avem $A - B = (-3, 4] - (1, 5] = (-3, 1]$, deci $(A - B) \cap \mathbb{Z} = (-3, 1] \cap \mathbb{Z} = \{-2, -1, 0, 1\} \Rightarrow$
$\Rightarrow \left|(A - B) \cap \mathbb{Z}\right| = \left|\{-2, -1, 0, 1\}\right| = 4$.

2. Coordonatele punctelor de intersecţie dintre dreaptă şi parabolă sunt soluţiile sistemului
$\begin{cases} 2x + 1 = y \\ y = y^2 - x + 3 \end{cases} \Rightarrow x^2 - x + 3 = 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$, cu soluţiile $x_1 = 1$ şi $x_2 = 2$.
Înlocuind în $y = 2x + 1$, obţinem $y_1 = 2x_1 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$, respectiv $y_2 = 2x_2 + 1 =$
$= 2 \cdot 2 + 1 = 5$. Deci punctele de intersecţie sunt $(x_1, y_1) = (1, 3)$ şi $(x_2, y_2) = (2, 5)$.

3. Se impun condiţiile $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [1, \infty)$ şi $2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2]$, deci
$x \in [1, \infty) \cap (-\infty, 2] = [1, 2]$. Avem $\sqrt{x-1} + \sqrt{2-x} = 1 \Rightarrow \left(\sqrt{x-1} + \sqrt{2-x}\right)^2 = 1^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x - 1 + 2 - x + 2\sqrt{(x-1)(2-x)} = 1 \Rightarrow 2\sqrt{(x-1)(2-x)} = 0 \Rightarrow (x-1)(2-x) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in \{1, 2\} \subset [1, 2]$.

4. Avem $2^{x!} \leq 2048 \Leftrightarrow 2^{x!} \leq 2^{11} \Leftrightarrow x! \leq 11$ şi $0! = 1 = 1! < 2! = 2 < 3! = 6 < 11 < 4! = 24 < n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$, deci $\left\{x \in \mathbb{N} \middle| 2^{x!} \leq 2048\right\} = \{0, 1, 2, 3\}$.

5. Avem $\text{dist}(A, d) = \dfrac{|5 \cdot 1 + 12 \cdot 1 - 4|}{\sqrt{5^2 + 13^2}} = \dfrac{13}{13} = 1$.

6. Avem $\text{tg}a = \dfrac{1}{\text{ctg}a} = \dfrac{1}{2}$ şi $\text{tg}b = \dfrac{1}{\text{ctg}b} = \dfrac{1}{5}$, deci $\text{tg}(a+b) = \dfrac{\text{tg}a + \text{tg}b}{1 - \text{tg}a \cdot \text{tg}b} = \dfrac{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}} = \dfrac{\frac{7}{10}}{\frac{9}{10}} = \dfrac{7}{9}$.

Varianta 52

1. Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |4x - 8| - 2 \cdot |4 - 2x|$ este constantă.

2. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care parabola $y = x^2 - 2x + a - 1$ şi dreapta $y = 2x + 3$ au două puncte distincte comune.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt[3]{x-1} + 1 = x$.

4. Să se determine numărul termenilor iraţionali ai dezvoltării $\left(\sqrt{3} + 1\right)^9$.

5. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $\vec{u} = (m+1)\vec{i} + 8\vec{j}$ şi $\vec{v} = (m-1)\vec{i} - 4\vec{j}$ să fie coliniari.

6. Triunghiul ABC are lungimile laturilor $AB = 5$, $BC = 7$ şi $AC = 8$. Să se calculeze $m(\sphericalangle A)$.

Rezolvări

1. Avem $|-x| = |x|$ pentru $\forall x \in \mathbb{R}$, deci $f(x) = |4x - 8| - 2|4 - 2x| = |4x - 8| - |8 - 4x| = 0$ pentru $\forall x \in \mathbb{R}$, adică funcţia f este constantă.

2. Parabola $y = x^2 - 2x + a - 1$ şi dreapta $y = 2x + 3$ au două puncte distincte comune dacă şi numai dacă ecuaţia $x^2 - 2x + a - 1 = 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + a - 4 = 0$ admite două rădăcini reale distincte $\Leftrightarrow \Delta = (-4)^2 - 4(a - 4) = 4(8 - a) > 0 \Rightarrow a \in (-\infty, 8)$.

3. Avem $\sqrt[3]{x-1} + 1 = x \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-1} = x - 1 \Leftrightarrow x - 1 = (x-1)^3 \Leftrightarrow (x-1)\left[(x-1)^2 - 1\right] = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x-1)(x-2)x = 0$, cu soluţiile $S = \{0, 1, 2\}$.

4. Termenul general al dezvoltării este $T_{k+1} = C_9^k \left(\sqrt{3}\right)^{9-k} \cdot 1^k = C_9^k \left(\sqrt{3}\right)^{8-2k} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{k+1} =$
$= 3^{4-k} C_9^k \left(\sqrt{3}\right)^{k+1}$, unde $k = \overline{0,9}$. Observăm că $T_{k+1} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \left(\sqrt{3}\right)^{k+1} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow k + 1 \in \{2, 4, 6, 8, 10\} \Leftrightarrow k \in M = \{1, 3, \cdots, 9\}$. Avem $|M| = 5$, deci dezvoltarea conţine 5 termeni raţionali, respectiv $10 - 5 = 5$ termeni iraţionali.

5. Observăm că pentru $m = 1$ obţinem $\vec{u} = 2\vec{i} + 8\vec{j}$ şi $\vec{v} = -4\vec{j}$, vectori care, în mod evident, nu sunt coliniari. Atunci $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sunt coliniari $\Leftrightarrow m \neq 1$ şi $\dfrac{m+1}{m-1} = \dfrac{8}{-4} = -2 \Rightarrow m = \dfrac{1}{3} \in \mathbb{R} - \{1\}$.

6. Conform teoremei cosinusului, avem $\cos A = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \dfrac{5^2 + 8^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 7} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow A = \arccos\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{}{3} \Rightarrow$ $m(\sphericalangle A) = 60^\circ$.

Varianta 53

1. Să se calculeze $\left[\sqrt{2009}\right] + 3 \cdot \left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x şi $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a lui x.

2. Să se determine imaginea intervalului $[2,3]$ prin funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x+8} - \sqrt{x} = 2$.

4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un element al mulţimii divizorilor naturali ai numărului 56, acesta să fie divizibil cu 4.

5. Fie vectorii $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$ şi $\vec{u} = 6\vec{i} + 2\vec{j}$. Să se determine p, $r \in \mathbb{R}$ astfel încât $\vec{u} = p\vec{a} + r\vec{b}$.

6. Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris unui triunghi care are lungimile laturilor 5, 7 şi 8.

Rezolvări

1. Avem $44^2 = 1936 < 2009 < 2025 = 45^2 \Rightarrow$ $44 < \sqrt{2009} < 45 \Rightarrow$ $\left[\sqrt{2009}\right] = 44$ şi

$\left\{-\dfrac{1}{3}\right\} = -\dfrac{1}{3} - \left[-\dfrac{1}{3}\right] = -\dfrac{1}{3} - (-1) = \dfrac{2}{3}$, deci $\left[\sqrt{2009}\right] + 3 \cdot \left\{-\dfrac{1}{3}\right\} = 44 + 3 \cdot \dfrac{2}{3} = 46$.

2. Avem $f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Observăm că funcţia f este strict crescătoare pe intervalul $[2,\infty) \supset [2,3]$, deci $2 \le x \le 3 \Rightarrow f(2) \le f(x) \le f(3) \Rightarrow -1 \le f(x) \le 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f([2,3]) \subset [-1,0]$. Reciproc, $\forall y \in [-1,0]$, $\exists x \in [2,3]$, $x = 2 + \sqrt{y+1}$, astfel încât $f(x) = y$, deci $[-1,0] \subset f([2,3])$. În concluzie, $f([2,3]) = [-1,0]$.

3. Se impun condiţiile $x + 8 \ge 0 \Leftrightarrow$ $x \in [-8,\infty)$ şi $x \ge 0 \Leftrightarrow$ $x \in [0,\infty)$, deci $x \in [-8,\infty) \cap [0,\infty) =$

$= [0,\infty)$. Avem $\sqrt{x+8} - \sqrt{x} = 2 \Rightarrow \sqrt{x+8} = \sqrt{x} + 2 \Rightarrow \left(\sqrt{x+8}\right)^2 = \left(\sqrt{x} + 2\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x + 8 = x + 4\sqrt{x} + 4 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow$ $x = 1 \in [0,\infty)$.

4. Avem $A = \{1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56\}$ mulţimea divizorilor naturali ai lui 56. Observăm că $|A| = 8$ şi că submulţimea elementelor lui A divizibile prin 4 este $A' = \{4, 8, 28, 56\}$, cu $|A'| = 4$, deci

$p = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2} = 0,5$.

5. Observăm că $\vec{a}+\vec{b}=2\vec{i} \Rightarrow \vec{i}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$ şi $\vec{a}-\vec{b}=2\vec{j} \Rightarrow \vec{j}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$. Atunci

$\vec{u}=6\vec{i}+2\vec{j}=6\cdot\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+2\cdot\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=3\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{a}-\vec{b}=4\vec{a}+2\vec{b}=p\vec{a}+r\vec{b} \Rightarrow p=4$ şi $r=2$,

deoarece vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ sunt liniar independenţi (mai mult, sunt perpendiculari, deoarece $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$).

6. Fie $a=5$, $b=7$, $c=8$, $p=\frac{a+b+c}{2}=10$. Conform formulei lui Heron,

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{10\cdot5\cdot3\cdot2}=10\sqrt{3}$. Avem $4RS=abc \Rightarrow R=\frac{abc}{4S}=\frac{5\cdot7\cdot8}{40\sqrt{3}}=$

$=\frac{7\sqrt{3}}{3}$, unde R este lungimea razei cercului circumscris triunghiului.

Varianta 54

1. Să se calculeze partea întreagă a numărului $\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2$.

2. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale inecuaţia $\frac{2x-1}{1-x}\geq\frac{3x+2}{1-2x}$.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt[3]{2-x}+x=2$.

4. Se consideră dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{y}\right)^{49}$. Să se determine termenul care îi conţine pe x şi y la aceeaşi putere.

5. Fie $\overrightarrow{r_A}=2\vec{i}+\vec{j}$, $\overrightarrow{r_B}=\vec{i}+3\vec{j}$ şi $\overrightarrow{r_C}=3\vec{i}+2\vec{j}$ vectorii de poziţie ai vârfurilor triunghiului ABC. Să se determine vectorul de poziţie al centrului de greutate a triunghiului ABC.

6. Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC, ştiind că $BC=3$ şi $\cos A=\frac{1}{2}$.

Rezolvări

1. Avem $\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2=10+2\sqrt{21}$. Observăm că $\left(\frac{9}{2}\right)^2=\frac{81}{4}<21<25=5^2 \Rightarrow \frac{9}{2}<\sqrt{21}<5 \Rightarrow$

$\Rightarrow 9<2\sqrt{21}<10 \Rightarrow 19<10+2\sqrt{21}<20 \Rightarrow \left[10+2\sqrt{21}\right]=19$.

2. Se impun condiţiile $1-x\neq0 \Leftrightarrow x\neq1$ şi $1-2x\neq0 \Leftrightarrow x\neq\frac{1}{2}$, deci $x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2},1\right\}$.

Avem $\frac{2x-1}{1-x}\geq\frac{3x+2}{1-2x} \Rightarrow \frac{2x-1}{1-x}-\frac{3x+2}{1-2x}\geq0 \Rightarrow \frac{(2x-1)(1-2x)-(1-x)(3x+2)}{(1-x)(1-2x)}\geq0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{-4x^2+4x-1-\left(-3x^2+x+2\right)}{(1-x)(1-2x)}\geq0 \Rightarrow \frac{-x^2+3x-3}{(1-x)(1-2x)}\geq0 \Rightarrow \frac{x^2-3x+3}{(x-1)(2x-1)}\leq0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-1)(2x-1)<0 \Rightarrow x \in \left(\frac{1}{2},1\right) \subset \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2},1\right\}$, deoarece $x^2-3x+3>0$ pentru $\forall x \in \mathbb{R}$, având $\Delta = -3 < 0$. Deci $x \in \left(\frac{1}{2},1\right)$.

3. Avem $\sqrt[3]{2-x}+x=2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{2-x}=2-x \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{2-x}\right)^3=(2-x)^3 \Leftrightarrow 2-x=(2-x)^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2-x)\left[(2-x)^2-1\right]=0 \Leftrightarrow (2-x)(1-x)(3-x)=0 \Rightarrow S=\{1,2,3\}$.

4. Avem $T_{k+1}=C_{49}^k\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^{49-k}\left(\sqrt{y}\right)^k = C_{49}^k x^{\frac{3}{2}(49-k)} y^{\frac{k}{2}}$, unde $k=\overline{0,49}$. Deci x şi y sunt la aceeaşi putere dacă şi numai dacă $\frac{2}{3}(49-k)=\frac{k}{2} \Leftrightarrow k=28$. Obţinem $T_{29}=C_{49}^{28}\ x^{14}y^{14}$.

5. Avem $\overrightarrow{r_G}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_C}\right)=\frac{1}{3}\left(6\vec{i}+6\vec{j}\right)=2\vec{i}+2\vec{j}$.

6. Avem $\cos A=\frac{1}{2}>0 \Rightarrow A=\frac{\pi}{3} \Rightarrow \sin A=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Conform teoremei sinusurilor, avem $2R=\frac{BC}{\sin A} \Leftrightarrow 2R=\frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{3} \Leftrightarrow R=\sqrt{3}$.

Varianta 55

1. Să se calculeze $\left[-\sqrt{8}\right]-\{-2,8\}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x şi $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a lui x.

2. Să se rezolve în mulţimea $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ x+y=5 \end{cases}$.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^x-5\cdot 2^{x+1}+16=0$.

4. Să se determine $x\in\mathbb{N}$, $x\geq 2$, astfel încât $C_x^2+A_x^2=30$.

5. Fie punctele $O(0,0)$, $A(2,1)$ şi $B(-2,1)$. Să se determine cosinusul unghiului format de vectorii $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OB}$.

6. Să se calculeze $\operatorname{tg}2x$, ştiind că $\operatorname{ctg}x=3$.

Rezolvări

1. Avem $2^2=4<8<9=3^2 \Rightarrow 2<\sqrt{8}<3 \Rightarrow -3<-\sqrt{8}<-2 \Rightarrow \left[-\sqrt{8}\right]=-3$ şi

$\{-2,8\}=-2,8-[-2,8]=-2,8-(-3)=0,2 \Rightarrow \left[-\sqrt{8}\right]-\{-2,8\}=-3-0,2=-3,2$.

2. Fie $S = x + y = 5$ şi $P = xy$. Avem $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = S^2 - 2P \Rightarrow 5^2 - 2P = 13 \Rightarrow$ $\Rightarrow P = 6$. Atunci x şi y sunt soluţiile ecuaţiei $t^2 - St + P = t^2 - 5t + 6 = 0$, respectiv $t_1 = 2$ şi $t_2 = 3$. Deci $(x,y) \in \{(2,3),(3,2)\}$.

3. Folosind notaţia $2^x = y$, $y > 0$, ecuaţia devine $y^2 - 10y + 16 = 0$, cu soluţiile $y_1 = 2$ şi $y_2 = 8$. Revenind la notaţia $2^x = y$, obţinem $2^{x_1} = y_1 = 2 \Rightarrow x_1 = 1$, respectiv $2^{x_2} = y_2 = 8 = 2^3 \Rightarrow x_2 = 3$. Deci $x \in \{1,3\}$.

4. Avem $C_x^2 = \dfrac{x!}{2!\cdot(x-2)!} = \dfrac{(x-1)x}{2}$ şi $A_x^2 = \dfrac{x!}{(x-2)!} = (x-1)x$, deci $C_x^2 + A_x^2 = 30 \Rightarrow$ $\Rightarrow \dfrac{(x-1)x}{2} + (x-1)x = 30 \Rightarrow \dfrac{3}{2}(x-1)x = 30 \Rightarrow (x-1)x = 20 \Rightarrow x^2 - x - 20 = 0$, cu soluţiile $x_1 = -4 \notin \mathbb{N}$ şi $x_2 = 5 \in \mathbb{N} \cap [2,\infty)$. Deci $x = 5$ este soluţia ecuaţiei.

5. Avem $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\overrightarrow{OB} = -2\vec{i} + \vec{j}$, $\left|\overrightarrow{OA}\right| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$, $\left|\overrightarrow{OB}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$,

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 2\cdot(-2) + 1\cdot 1 = -3$, deci $\cos(\sphericalangle AOB) = \dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{\left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OB}\right|} = \dfrac{-3}{\left(\sqrt{5}\right)^2} = -\dfrac{3}{5}$.

6. Avem $\operatorname{ctg}x = 3 \Rightarrow \operatorname{tg}x = \dfrac{1}{\operatorname{ctg}x} = \dfrac{1}{3}$, deci $\operatorname{tg}2x = \dfrac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2 x} = \dfrac{2\cdot\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}} = \dfrac{3}{4}$.

Varianta 56

1. Să se rezolve în mulţimea numerelor complexe ecuaţia $2\overline{z} + z = 3 + 4i$.

2. Ştiind că x_1 şi x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^2 + 3x + 1 = 0$, să se calculeze $x_1^3 + x_2^3$.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $1 + 5^x - 2\cdot 25^x = 0$.

4. Se consideră dezvoltarea $\left(a^2 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)^9$, $a \neq 0$. Să se determine rangul termenului care-l conţine pe a^4.

5. Să se calculeze $\vec{u}^2 - \vec{v}^2$, ştiind că $\vec{u} - \vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ şi $\vec{u} + \vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$.

6. Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris unui triunghi dreptunghic care are catetele de lungimi 5 şi 12.

Rezolvări

1. Fie $z = a + bi$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Atunci $2\overline{z} + z = 2(a - bi) + a + bi = 3a - bi = 3 + 4i \Leftrightarrow 3a = 3$ şi $-b = 4 \Leftrightarrow a = 1$ şi $b = -4$, deci $z = 1 - 4i$.

2. Avem $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-3$ şi $x_1x_2=\frac{c}{a}=1$, deci $x_1^3+x_2^3=\left(x_1+x_2\right)^3-3x_1x_2\left(x_1+x_2\right)=$
$=(-3)^3-3\cdot1=-18$.

3. Folosind notaţia $5^x=y$, $y>0$, ecuaţia devine $1+y-2y^2=0 \Leftrightarrow 2y^2-y-1=0$, cu soluţiile $y_1=-\frac{1}{2}\notin(0,\infty)$, respectiv $y_2=1\in(0,\infty)$. Revenind la notaţia $5^x=y$, obţinem $5^x=1\Rightarrow$
$\Rightarrow x=0$.

4. Termenul general din dezvoltare este $T_{k+1}=C_9^k\left(a^2\right)^{9-k}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)^k=C_9^k\ a^{18-2k}a^{-\frac{k}{3}}=$
$=C_9^k\ a^{\frac{54-7k}{3}}$, unde $k=\overline{0,9}$. Obţinem a^4 pentru $\frac{54-7k}{3}=4\Leftrightarrow k=6$, deci termenul căutat este $T_7=C_9^6\,a^4$, având rangul 7.

5. Avem $\vec{u}^2-\vec{v}^2=\left(\vec{u}-\vec{v}\right)\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=\left(3\vec{i}+2\vec{j}\right)\left(2\vec{i}+3\vec{j}\right)=3\cdot2+2\cdot3=12$.

6. Conform teoremei lui Pitagora, ipotenuza are lungimea $\sqrt{5^2+12^2}=13$. Ţinând cont de faptul că ipotenuza este diametru în cercul circumscris triunghiului dreptunghic, obţinem că $2R=13\Rightarrow$
$\Rightarrow R=\frac{13}{2}$.

Varianta 57

1. Să se arate că numărul $\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{3}$ este natural.

2. Să se arate că $\left(x^2+4x+5\right)\left(x^2+2x+2\right)\geq1$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2^2 x+\log_2(4x)=4$.

4. Să se determine termenul care nu-l conţine pe x din dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{200}$, $x>0$.

5. Se consideră dreapta $d:\ 4x-8y+1=0$ şi punctul $A(2,1)$. Să se determine ecuaţia dreptei care trece prin punctul A şi este paralelă cu dreapta d.

6. Triunghiul ABC are $AB=2$, $AC=4$ şi $m(\sphericalangle A)=60^\circ$. Să se calculeze lungimea medianei duse din A.

Rezolvări

1. Avem $7+4\sqrt{3}=2^2+2\cdot2\cdot\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2=\left(2+\sqrt{3}\right)^2\Rightarrow\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}=2+\sqrt{3}\Rightarrow$
$\Rightarrow\sqrt{7+4\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}-\sqrt{3}=2\in\mathbb{N}$.

2. Avem $x^2+4x+5=(x+2)^2+1\geq1$ pentru $\forall x\in\mathbb{R}$ şi $x^2+2x+2=(x+1)^2+1\geq1$ pentru $\forall x\in\mathbb{R}$, deci $\left(x^2+4x+5\right)\left(x^2+2x+2\right)\geq1$ pentru $\forall x\in\mathbb{R}$.

3. Se impune condiţia $x > 0 \Leftrightarrow x \in (0, \infty)$. Avem $\log_2(4x) = \log_2 4 + \log_2 x = 2 + \log_2 x$. Folosind notaţia $\log_2 x = y$, ecuaţia devine $y^2 + 2 + y = 4 \Leftrightarrow y^2 + y - 2 = 0$, cu soluţiile $y_1 = -2$ şi $y_2 = 1$. Revenind la notaţia $\log_2 x = y$, obţinem $\log_2 x_1 = y_1 = -2 \Rightarrow$ $\Rightarrow x_1 = 2^{-2} = \frac{1}{4}$, respectiv $\log_2 x_2 = y_2 = 1 \Rightarrow x_2 = 2$, deci $x \in \left\{\frac{1}{4}, 2\right\} \subset (0, \infty)$.

4. Avem $T_{k+1} = C_{200}^k \left(\sqrt[3]{x}\right)^{200-k} \left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^k = C_{200}^k \, x^{\frac{200-k}{3}} \cdot 2^k \cdot x^{-\frac{k}{2}} = C_{200}^k \cdot 2^k \cdot x^{\frac{400-5k}{6}}$, unde $k = \overline{0,200}$. Termenul care nu-l conţine pe x este cel pentru care exponentul $\frac{400-5k}{6} = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow k = 80$, deci $T_{81} = C_{200}^{80} \cdot 2^{80}$.

5. Avem $d: 4x - 8y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{8} \Rightarrow m = \frac{1}{2}$, unde $m = \text{panta}(d)$. Fie d' dreapta cu proprietăţile $d' \parallel d$ şi $A \in d'$. Din $d' \parallel d \Rightarrow m' = m = \frac{1}{2}$, unde $m' = \text{panta}(d')$.

Din $A(2,1) \in d' \Rightarrow y - y_A = m'(x - x_A) \Rightarrow y - 1 = \frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow x - 2y = 0$, deci $d': x - 2y = 0$.

6. Conform teoremei lui Pitagora generalizată, avem $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A =$ $= 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cos 60^\circ = 12$. Aplicând teorema medianei, obţinem $m_a^2 = \frac{2\left(AB^2 + AC^2\right) - BC^2}{4} = \frac{2\left(2^2 + 4^2\right) - 12}{4} = 7 \Rightarrow m_a = \sqrt{7}$, unde m_a reprezintă lungimea medianei duse din A.

Varianta 58

1. Să se calculeze partea reală a numărului complex $\frac{1+4i}{4+7i}$.

2. Să se determine axa de simetrie a graficului funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{x+1} + 3^{1-x} = 10$.

4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un element al mulţimii $A = \{1, 3, 5, \cdots, 2009\}$, acesta să fie multiplu de 3.

5. Se consideră dreapta $d: 2x + y - 1 = 0$ şi punctul $A(3, 2)$. Să se determine ecuaţia dreptei care trece prin punctul A şi este perpendiculară pe dreapta d.

6. Fie triunghiul ABC care are $AB = AC = 5$ şi $BC = 6$. Să se calculeze distanţa de la centrul de greutate al triunghiului ABC la dreapta BC.

Rezolvări

1. Avem $z = \frac{1+4i}{4+7i} = \frac{(1+4i)(4-7i)}{(4+7i)(4-7i)} = \frac{32+9i}{4^2+7^2} = \frac{32}{65} + \frac{9}{65}i \Rightarrow \text{Re}(z) = \frac{32}{65}$.

2. Axa de simetrie a graficului funcţiei f are ecuaţia $x = x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-3)}{2\cdot 3} = 1$.

3. Avem $3^{x+1} + 3^{1-x} = 10 \Big| \cdot 3^x \Rightarrow 3\cdot 3^{2x} + 3 = 10\cdot 3^x$. Folosind notaţia $3^x = y$, $y > 0$, ecuaţia devine $3y^2 - 10y + 3 = 0$, cu soluţiile $y_1 = \frac{1}{3}$, respectiv $y_2 = 3$. Revenind la notaţia $3^x = y$, obţinem $3^{x_1} = y_1 = \frac{1}{3} \Rightarrow x_1 = -1$, respectiv $3^{x_2} = y_2 = 3 \Rightarrow x_2 = 1$, deci $x \in \{-1, 1\}$.

4. Observăm că $|A| = \frac{2009+1}{2} = 1005$, iar elementele divizibile prin 3 sunt $3 = 3\cdot 1$, $9 = 3\cdot 3$, $15 = 3\cdot 5$, ..., $2007 = 3\cdot 669$, în număr de $\frac{669+1}{2} = 335$, deci $p = \frac{335}{1005} = \frac{1}{3}$.

5. Avem $d:\ 2x + y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = -2x + 1$, deci $m = -2$, unde $m = \text{panta}(d)$. Fie d' dreapta care verifică proprietăţile $d' \perp d$ şi $A \in d'$. Din $d' \perp d \Rightarrow m' = -\frac{1}{m} = \frac{1}{2}$, unde $m' = \text{panta}(d')$.

Din $A' \in d' \Rightarrow y - y_A = m'(x - x_A) \Rightarrow y - 2 = \frac{1}{2}(x - 3) \Rightarrow x - 2y + 1 = 0$, deci $d':\ x - 2y + 1 = 0$.

6. Fie M mijlocul laturii BC. Atunci $BM = MC = \frac{BC}{2} = 3$. Din $AB = AC \Rightarrow AM \perp BC$.

Aplicând teorema lui Pitagora, obţinem $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC. Avem $d(G, BC) = GM = \frac{1}{3}AM = \frac{4}{3}$, unde am folosit faptul că G împarte fiecare mediană, în particular pe AM, în proporţiile $\frac{AG}{AM} = \frac{2}{3}$, respectiv $\frac{GM}{AM} = \frac{1}{3}$.

Varianta 59

1. Să se arate că numărul $\lg\left(1-\frac{1}{2}\right) + \lg\left(1-\frac{1}{3}\right) + \lg\left(1-\frac{1}{4}\right) + \cdots + \lg\left(1-\frac{1}{100}\right)$ este întreg.

2. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $|x-3| + |4-x| = 1$.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3 x + \frac{1}{\log_3 x} = \frac{5}{2}$.

4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un element al mulţimii $A = \{2, 4, 6, \cdots, 2010\}$, acesta să fie divizibil cu 4, dar să nu fie divizibil cu 8.

5. Se consideră punctele $A(2, m)$ şi $B(m, -2)$. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $AB = 4$.

6. Să se calculeze $\sin^2 x$, ştiind că $\text{ctg}x = 6$.

Rezolvări

1. Avem $\lg\left(1-\frac{1}{2}\right)+\lg\left(1-\frac{1}{3}\right)+\lg\left(1-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\lg\left(1-\frac{1}{100}\right)=$

$=\lg\left(\frac{1}{2}\right)+\lg\left(\frac{2}{3}\right)+\lg\left(\frac{3}{4}\right)+\cdots+\lg\left(\frac{99}{100}\right)=\lg\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}\right)=\lg\left(\frac{1}{100}\right)=-2\in\mathbb{Z}$.

2. Pentru $x\in(-\infty,3)$, ecuaţia devine $-x+3-x+4=1\Rightarrow x=3\notin(-\infty,3)$. Pentru $x\in[3,4]$, ecuaţia decine $x-3-x+4=1\Leftrightarrow 1=1$, relaţie îndeplinită pentru $\forall x\in[3,4]$. Pentru $x\in(4,\infty)$, ecuaţia devine $x-3+x-4=1\Rightarrow x=4\notin(4,\infty)$. În concluzie, $x\in[3,4]$ reprezintă soluţiile ecuaţiei.

3. Se impun condiţiile $x>0$ şi $x\neq 1$, deci $x\in(0,1)\cup(1,\infty)$. Folosind notaţia $\log_3 x=y$, ecuaţia devine $y+\frac{1}{y}=\frac{5}{2}\Rightarrow 2y^2-5y+2=0$, cu soluţiile $y_1=\frac{1}{2}$, respectiv $y_2=2$. Revenind la notaţia $\log_3 x=y$, obţinem $\log_3 x_1=y_1=\frac{1}{2}\Rightarrow x_1=\sqrt{3}$, respectiv $\log_3 x_2=y_2=2\Rightarrow$

$\Rightarrow x_2=3^2=9$, deci $x\in\left\{\sqrt{3},9\right\}\subset(0,1)\cup(1,\infty)$.

4. Observăm că $|A|=\frac{2010}{2}=1005$. Fie $B=\left\{n\in A\,\middle|\,4/n\right\}=\{4,8,12,\cdots,2004,2008\}$. Evident $|B|=\frac{2008}{4}=501$. Fie $C=\left\{n\in A\,\middle|\,8/n\right\}=\{8,16,24,\cdots,2000,2008\}$. Evident $|C|=\frac{2008}{8}=251$ şi $C\subset B$, deci $\left\{n\in A\,\middle|\,4/n,\ 8\not/\,n\right\}=B-C$ are cardinalul $|B-C|=|B|-|C|=502-251=251$, deci $p=\frac{251}{1005}$.

5. Avem $AB=\sqrt{(2-m)^2+[m-(-2)]^2}=\sqrt{2\left(m^2+4\right)}$, deci $AB=4\Leftrightarrow\sqrt{2\left(m^2+4\right)}=4\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\left(m^2+4\right)=16\Leftrightarrow m^2=4\Leftrightarrow m=\pm 2$.

6. Avem $\sin^2 x=\frac{1}{1+\text{ctg}^2x}=\frac{1}{1+6^2}=\frac{1}{37}$.

Varianta 60

1. Să se arate că $2\left(1+3+3^2+\cdots+3^8\right)<3^9$.

2. Fie x_1, x_2 soluţiile ecuaţiei $x^2+5x-7=0$. Să se arate că $x_1^3+x_2^3$ este întreg.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5 x+\log_x 5=\frac{5}{2}$.

4. Să se determine $x\in\mathbb{N}$, $x\geq 3$, astfel încât $C_{2x-3}^2=3$.

5. Se consideră punctele $A(2,3)$ şi $B(-3,-2)$. Să se scrie ecuaţia mediatoarei segmentului AB.

6. Fie vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$. Ştiind că $\vec{u}\cdot\vec{v}=5$, $|\vec{u}|=2$ şi $|\vec{v}|=3$, să se calculeze $\cos(\sphericalangle(\vec{u},\vec{v}))$.

Rezolvări

1. Avem $2\left(1+3+3^2+\cdots+3^8\right)=2\cdot\dfrac{3^9-1}{3-1}=3^9-1<3^9$.

2. Avem $S=x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=-5$ şi $P=x_1x_2=\dfrac{c}{a}=-7$, deci $x_1^3+x_2^3=$

$=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=(-5)^3-3\cdot(-7)\cdot(-5)=-230\in\mathbb{Z}$.

3. Se impun condiţiile $x>0$ şi $x\neq 1\Rightarrow x\in(0,1)\cup(1,\infty)$. Folosind notaţia $\log_5 x=y$, ecuaţia devine $y+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{2}\Rightarrow 2y^2-5y+2=0$, cu soluţiile $y_1=\dfrac{1}{2}$ şi $y_2=2$. Revenind la notaţia $\log_5 x=y$, obţinem $\log_5 x_1=y_1=\dfrac{1}{2}\Rightarrow x_1=\sqrt{5}$, respectiv $\log_5 x_2=y_2=2\Rightarrow$ $\Rightarrow x_2=5^2=25$. Deci $x\in\left\{\sqrt{5},25\right\}\subset(0,1)\cup(1,\infty)$.

4. Se impune condiţia $2x-3\geq 2\Leftrightarrow x\geq\dfrac{5}{2}$, îndeplinită pentru $x\in\mathbb{N}$, $x\geq 3$. Avem $C_{2x-3}^2=\dfrac{(2x-4)(2x-3)}{2}=(x-2)(2x-3)$, deci $C_{2x-3}^2=3\Rightarrow(x-2)(2x-3)=3\Rightarrow$ $\Rightarrow 2x^2-7x+3=0$, cu soluţiile $x_1=\dfrac{1}{2}\notin\mathbb{N}$, respectiv $x_2=3\in\mathbb{N}\cap\left[\dfrac{5}{2},\infty\right)$. Deci $x=3$ este soluţia ecuaţiei.

5. Notăm cu M mijlocul segmentului AB. Atunci $x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2}=-\dfrac{1}{2}$, $y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{1}{2}$. Avem $m=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{-2-3}{-3-2}=1$, unde $m=\text{panta}(AB)$. Fie d mediatoarea segmentului AB. Atunci $d\perp AB$ şi $M\in AB$. Din $d\perp AB\Rightarrow m'=-\dfrac{1}{m}=-1$, unde $m'=\text{panta}(d)$. Din $M\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)\in d\Rightarrow(d):y-y_M=m'(x-y_M)\Rightarrow y-\dfrac{1}{2}=-\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\Rightarrow x+y=0$, deci ecuaţia mediatoarei segmentului AB este $(d):x+y=0$, reprezentând bisectoarea cadranului al II-lea.

6. Avem $\cos(\sphericalangle(\vec{u},\vec{v}))=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\dfrac{5}{2\cdot 3}=\dfrac{5}{6}$.